MAKRON
*Books*

# CÁLCULO
## Com Geometria Analítica

**Volume 2**

**2ª Edição**

240520131036001075
TEC-IT.COM

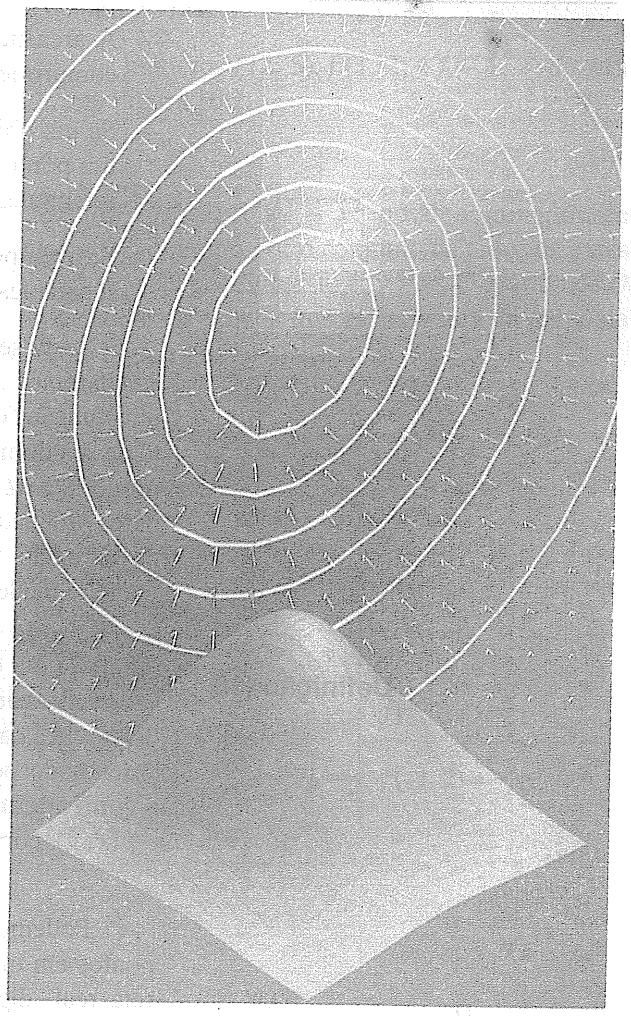
CÓPIA NÃO AUTORIZADA É CRIME
ABDR
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIREITOS REPROGRÁFICOS
RESPEITE O DIREITO AUTORAL
EDITORA AFILIADA

MAKRON Books

# Capítulo 16

# DIFERENCIAÇÃO PARCIAL

## INTRODUÇÃO



Um fabricante pode constatar que o custo de produção $C$ de um artigo depende da qualidade do material usado, do salário-hora dos operários, do tipo de maquinaria necessário, das despesas de manutenção e da supervisão. Dizemos então que $C$ é *função de cinco variáveis*, porque depende de cinco quantidades diferentes. Neste capítulo estudaremos essas funções escalares, começando com o caso de duas variáveis independentes e passando então a um número arbitrário de variáveis.

Em primeiro lugar mostraremos como representar graficamente funções de duas ou três variáveis. Em seguida generalizaremos os conceitos de uma variável de limite, função contínua, derivada e diferencial. (As integrais de funções de diversas variáveis serão definidas no próximo capítulo.) Entre as aplicações consideradas nos exemplos e exercícios estão: determinação da taxa de variação da temperatura de sólidos, avaliação da taxa à qual um poluente emitido por uma chaminé se dissipa, a mensuração da intensidade dos ventos em um furacão, planejamento de *chips* para computador, pesquisas sobre a relação entre o preço de mercado de um produto e a procura pelo consumidor.

Na Seção 16.6 introduzimos um importante instrumento para análise de valores de uma função de várias variáveis – o *gradiente*. Utilizaremos o gradiente para achar a taxa de variação de uma quantidade escalar, como temperatura ou pressão, quando um ponto se move em determinada direção. Outra aplicação importante é a determinação dos valores extremos de uma função.

# 16.1 FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

As funções estudadas nos capítulos anteriores envolvem apenas uma variável independente. Tais funções têm muitas aplicações. Entretanto, em não poucos problemas, ocorrem *diversas* variáveis independentes.

## ILUSTRAÇÃO

— A área de um retângulo depende de *duas* quantidades – comprimento e largura.

— Se um objeto está localizado no espaço, a temperatura em um ponto $P$ do objeto pode depender de *três* coordenadas retangulares $x, y, z$ de $P$.

— Se a temperatura de um objeto no espaço varia com o tempo $t$, então estão em jogo *quatro* variáveis, $x, y, z$ e $t$.

Nesta seção definiremos funções de diversas variáveis e estudaremos algumas de suas propriedades. Relembremos que uma função $f$ é uma correspondência que associa a cada elemento de seu domínio $D$ exatamente um elemento do seu contradomínio $E$. Se $D$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (o conjunto de todos os pares ordenados $(x, y)$ de números reais) e $E$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, então $f$ é uma *função de duas variáveis (reais)*. Outra maneira de definir este conceito é:

**Definição (16.1)**

Seja $D$ um conjunto de pares ordenados de números reais. Uma **função $f$ de duas variáveis** é uma correspondência que associa a cada par $(x, y)$ em $D$ exatamente um número real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto $D$ é o **domínio** de $f$. O **contradomínio** de $f$ consiste em todos os números reais $f(x, y)$, com $(x, y)$ em $D$.

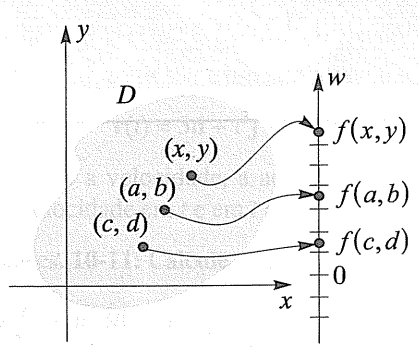



**Figura 16.1**

Podemos representar o domínio $D$ da Definição (16.1) por pontos em um plano-$xy$ e o contradomínio por pontos de uma reta real, digamos um eixo-$w$, conforme Figura 16.1. Setas curvas associam pares ordenados em $D$ aos números correspondentes no contradomínio. A título de aplicação, suponhamos uma chapa plana de metal com a forma de $D$. A cada ponto $(x, y)$ da chapa corresponde uma temperatura $f(x, y)$ que pode ser registrada em um termômetro, representado pelo eixo-$w$. Podemos também considerar $D$ como a superfície de um lago e representar por $f(x, y)$ a profundidade da água no ponto $(x, y)$. Há inúmeras outras interpretações físicas da Definição (16.1).

Em geral utilizamos uma expressão em $x$ e $y$ para especificar $f(x, y)$ e admitimos que o domínio seja o conjunto de todos os pares $(x, y)$ para os quais a expressão tem sentido. Dizemos então que $f$ é **uma função de $x$ e $y$.**

## EXEMPLO 1

Seja $f(x, y) = \dfrac{xy, - 5}{2\sqrt{y - x^2}}$.

**(a)** Esboce o domínio $D$ de $f$.

**(b)** Represente os números $f(2, 5)$, $f(1, 2)$ e $f(-1, 2)$ em um eixo-$w$, conforme Figura 16.1.

## SOLUÇÃO

**(a)** Considerando o radical $\sqrt{y - x^2}$ no denominador de $f(x, y)$, vemos que o domínio $D$ é o conjunto de todos os pares $(x, y)$ tais que $y - x^2$ seja positivo, isto é, $y > x^2$. O gráfico de $D$ é o conjunto de todos os pontos que estão acima da parábola $y = x^2$, conforme Figura 16.2.

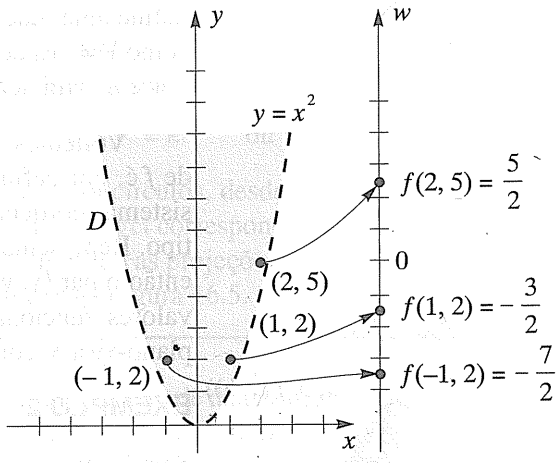



**Figura 16.2**

**(b)** Por substituição

$$f(2, 5) = \frac{(2)(5) - 5}{2\sqrt{5 - 4}} = \frac{5}{2}$$

Analogamente, $f(1, 2) = -\frac{3}{2}$ e $f(-1, 2) = -\frac{7}{2}$. Estes valores funcionais estão indicados no eixo-$w$ da Figura 16.2.

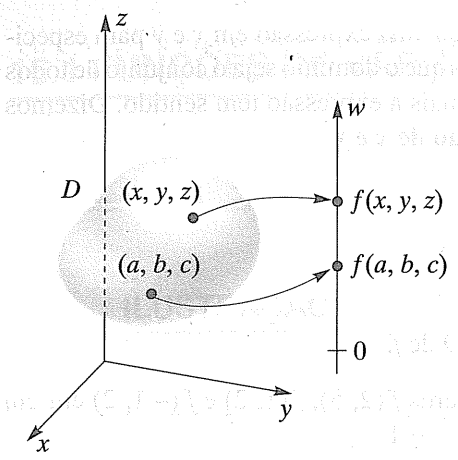



Figura 16.3

Podemos empregar fórmulas para definir funções de duas variáveis. Por exemplo, a fórmula $V = \pi r^2 h$ exprime o volume $V$ de um cilindro circular reto como função da altura $h$ e do raio da base $r$. Os símbolos $r$ e $h$ são chamados **variáveis independentes**, e $V$ é a **variável dependente**.

Uma função $f$ de três variáveis (reais) se define como em (16.1), com a diferença que o domínio $D$ é agora um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Neste caso, a cada terno ordenado $(x, y, z)$ em $D$ está associado exatamente um número real $f(x, y, z)$. Representando $D$ por uma região em três dimensões, conforme ilustrado na Figura 16.3, a cada ponto $(x, y, z)$ de $D$ corresponde um único ponto $f(x, y, z)$ no eixo-$w$. Como aplicação, podemos considerar $D$ como um objeto sólido e $f(x, y, z)$ como a temperatura em $(x, y, z)$.

Geralmente as funções de três variáveis são definidas por expressões. Por exemplo,

$$f(x, y, z) = \frac{xe^y + \sqrt{z^2 + 1}}{xy \operatorname{sen} z}$$

define uma função de $x$, $y$ e $z$. Podem-se também usar fórmulas, como $V = lwn$ do volume de uma caixa retangular de dimensões $l$, $w$ e $h$, para definir funções de três variáveis.

Voltemos a uma função $f$ de duas variáveis $x$ e $y$. O **gráfico** de $f$ é, por definição, o gráfico da equação $z = f(x, y)$ em um sistema coordenado $xyz$ e é, em geral, uma superfície $S$ de algum tipo. Representando o domínio $D$ por uma região do plano-$xy$, então o par $(x, y)$ em $D$ é representado pelo ponto $(x, y, 0)$. Os valores funcionais $f(x, y)$ são as distâncias (com sinal) do plano-$xy$ a $S$, conforme ilustrado na Figura 16.4.

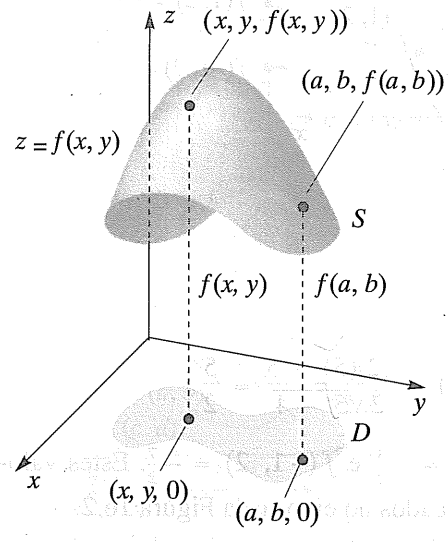



Figura 16.4

## EXEMPLO 2

Seja $f$ a função com domínio $D$ dada por

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2 \text{ e } D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Esboce o gráfico de $f$ e exiba os traços nos planos $z = 0$, $z = 2$, $z = 4$, $z = 6$ e $z = 8$.

## SOLUÇÃO

O domínio $D$ pode ser representado por todos os pontos do círculo $x^2 + y^2 = 9$, inclusive sua circunferência, no plano-$xy$. O gráfico de $f$ é a porção do gráfico de

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

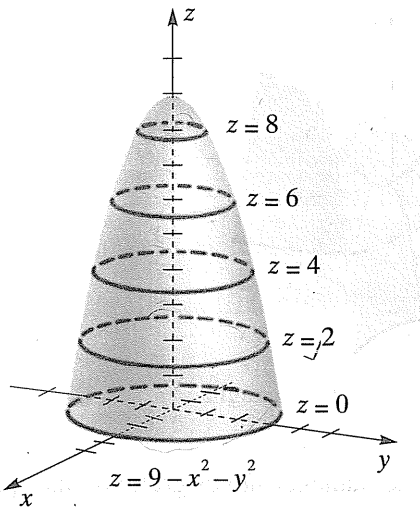



**Figura 16.5** Traços circulares nos planos $z = k$,

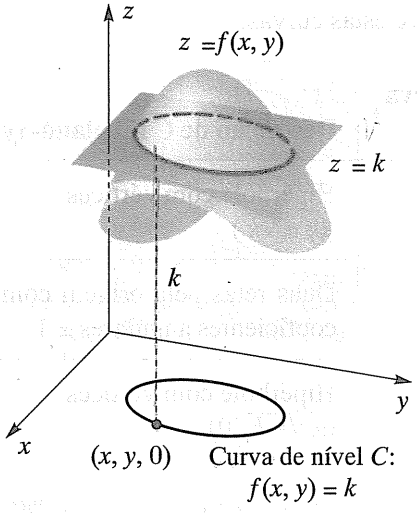



**Figura 16.6**

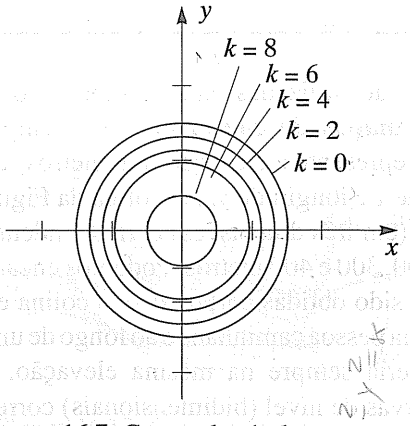



**Figura 16.7** Curvas de nível: $9 - x^2 - y^2 = k$.

(um parabolóide) que está no plano-$xy$ ou acima dele (ver Figura 16.5).

Para achar o traço no plano $z = k$, consideremos

$$k = 9 - x^2 - y^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k$$

Fazendo $k$ = 0, 2, 4, 6 e 8, obtemos os círculos de raios 3, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$ e 1, respectivamente, exibidos na Figura 16.5.

---

Seja $f$ uma função de duas variáveis e consideremos o traço do gráfico de $f$ no plano $z = k$, ilustrado na Figura 16.6. Projetando este traço no plano-$xy$, obtemos uma curva $C$ de equação $f(x, y) = k$. Note que, se um ponto $(x, y, 0)$ se move ao longo de $C$, os valores funcionais $f(x, y)$ correspondentes são sempre iguais a $k$. $C$ é chamada uma **curva de nível** de $f$.

### EXEMPLO 3

Esboce algumas curvas de nível da função $f$ do Exemplo 2.

### SOLUÇÃO

As curvas de nível são gráficos, no plano-$xy$, de equações da forma $f(x, y) = k$ – isto é,

$$9 - x^2 - y^2 = k \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k$$

Essas curvas são círculos, desde que $0 \le k < 9$. A Figura 16.7 exibe curvas de nível correspondentes a $k$ = 0, 2, 4, 6 e 8. Essas curvas de nível são as projeções, no plano-$xy$, dos traços circulares exibidos na Figura 16.5.

---

Se $f$ é uma função de duas variáveis e esboçamos as curvas de nível $f(x, y) = k$ para valores eqüiespaçados de $k$, como $k$ = 0, 2, 4, 6 e 8 no Exemplo 3, então a proximidade de curvas sucessivas nos dá informação sobre a aclividade do gráfico de $f$. Na Figura 16.7, as curvas de nível correspondentes a $k = 0$ e $k = 2$ estão mais próximas uma da outra do que as correspondentes a $k = 2$ e $k = 8$, o que indica que a aclividade da superfície da Figura 16.5 é maior nas proximidades do plano-$xy$.

### EXEMPLO 4

Se $f(x, y) = y^2 - x^2$, esboce algumas curvas de nível de $f$.

**SOLUÇÃO** O gráfico de $f$ é o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que se obtém fazendo-se $a = b = c = 1$ em (14.46). A Figura 16.8 é um esboço do gráfico.

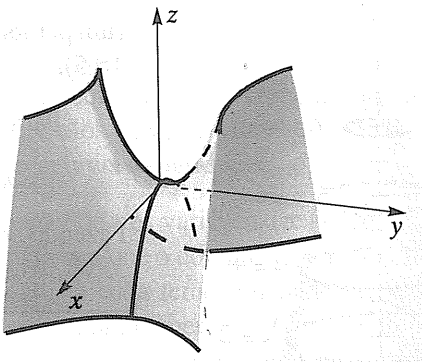



**Figura 16.8**

As curvas de nível no plano-$xy$ são os gráficos das equações $f(x, y) = k$ – isto é, de

$$y^2 - x^2 = k,\ k \text{ em } \mathbb{R}$$

O quadro a seguir descreve estas curvas.

| Valor de $k$ | Equação da curva de nível $C$ | Descrição de $C$ no plano-$xy$ |
|---|---|---|
| $k > 0$ | $y^2 - x^2 = k$ | Hipérbole com vértices $(0, \pm\sqrt{k})$ |
| $k = 0$ | $y^2 - x^2 = 0$, ou $y = \pm x$ | Duas retas pela origem com coeficientes angulares $\pm 1$ |
| $k < 0$ | $x^2 - y^2 = k$, ou $y^2 - x^2 = -k$ | Hipérbole com vértices $(\pm\sqrt{-k}, 0)$ |

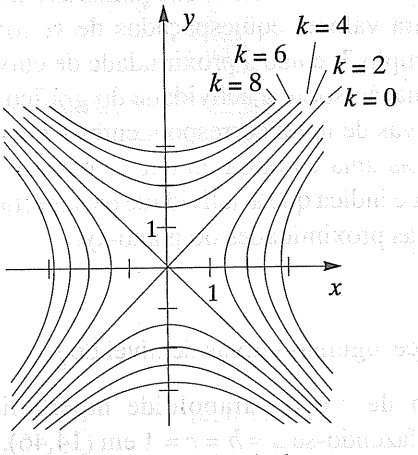



**Figura 16.9** Curvas de nível: $y^2 - x^2 = k$.

A Figura 16.9 apresenta as curvas de nível correspondentes a $k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$ e $\pm 8$.

As curvas de nível são utilizadas para a elaboração de **mapas topográfico**, ou **mapas de contorno**. Por exemplo, suponhamos que $f(x, y)$ represente a elevação (em metros) em um ponto $(x, y)$ de latitude $x$ e longitude $y$. Na colina da Figura 16.10 esboçamos curvas (em três dimensões) correspondentes às elevações de 0, 100, 200, 300 e 400 metros. Podemos encarar essas curvas como tendo sido obtidas cortando-se a colina em fatias paralelas à base. Uma pessoa caminhando ao longo de uma dessas curvas permaneceria sempre na mesma elevação. A Figura 16.11 exibe as curvas de nível (bidimensionais) correspondentes às mesmas elevações. Elas representam a visão que teríamos olhando para a colina de um avião acima dela.

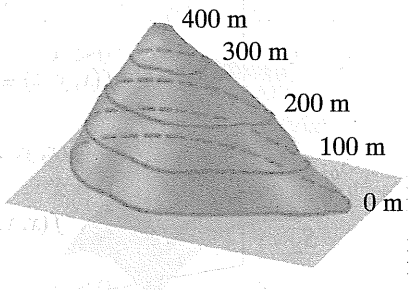



**Figura 16.10** Elevações.

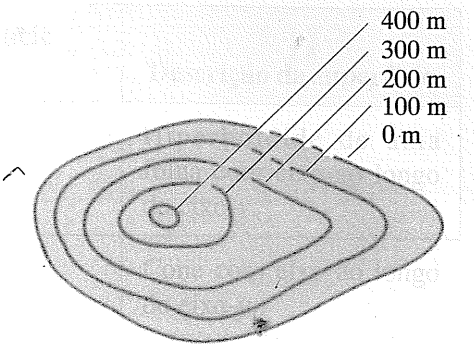



**Figura 16.11** Mapa topográfico da coluna.

Mapa análogo é utilizado para indicar a profundidade da água em um lago. Um exemplo é o da Figura 16.12, em que $f(x, y)$ é a profundidade da água no ponto $(x, y)$. Que partes do lago devem ser evitadas por esquiadores aquáticos?

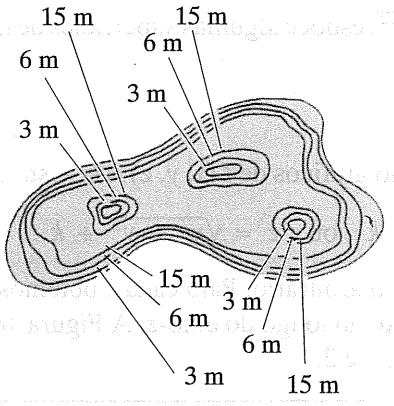



**Figura 16.12** Profundidade da água em um lago.

Como outra ilustração das curvas de nível, a Figura 16.13 exibe um mapa meteorológico dos Estados Unidos, em que $f(x, y)$ denota a temperatura elevada em $(x, y)$ durante certo dia. Ao longo das curvas e do nível, chamadas **curvas isotérmicas**, a temperatura é constante. Em outro mapa meteorológico $f(x, y)$ representaria a pressão barométrica em $(x, y)$; as curvas de nível neste caso seriam chamadas **isobáricas**.

Se $f$ é uma função de três variáveis $x$, $y$ e $z$, então, por definição, as **superfícies de nível** de $f$ são os gráficos de $f(x, y, z) = k$ para valores convenientes de $k$. Fazendo $k = w_0$, $w_1$ e $w_2$, os gráficos resultantes serão superfícies $S_0$, $S_1$ e $S_2$, ilustradas na Figura 16.14. $f(x, y, z)$ não se altera quando um ponto $(x, y, z)$ se move ao longo de uma dessas superfícies. Se $f(x, y, z)$ é a temperatura em $(x, y, z)$, as superfícies de nível são **superfícies isotérmicas**, e a temperatura é constante em cada superfície. Se $f(x, y, z)$ representa o potencial elétrico, as superfícies de nível são **superfícies eqüipotenciais**, e a voltagem não se altera se $(x, y, z)$ permanece em uma dessas superfícies.

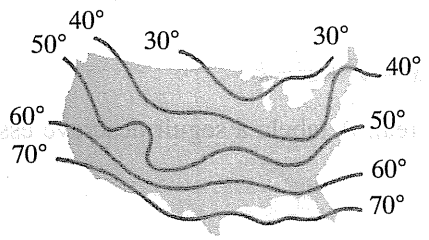



**Figura 16.13** Curvas isotérmicas.

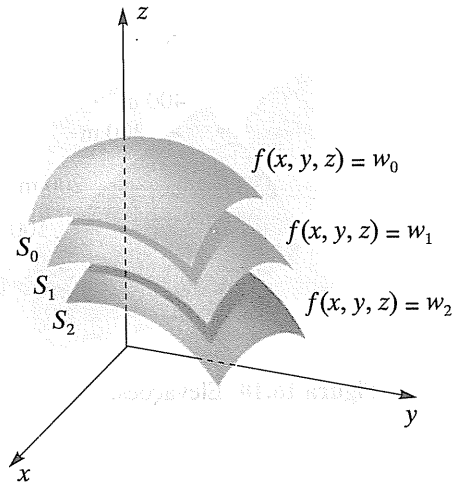



**Figura 16.14** Superfícies de nível de $f(x, y, z)$.

## EXEMPLO 5

Se $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$, esboce algumas superfícies de nível de $f$.

## SOLUÇÃO

As superfícies de nível são gráficos de $f(x, y, z) = k$ – isto é, se

$$z - \sqrt{x^2 + y^2} = k \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} + k$$

em que $k$ é um número real arbitrário. Para cada $k$ obtemos um cone circular reto com eixo ao longo do eixo-$z$. A Figura 16.15 ilustra os casos $k = -1, 0, 1$ e 2.

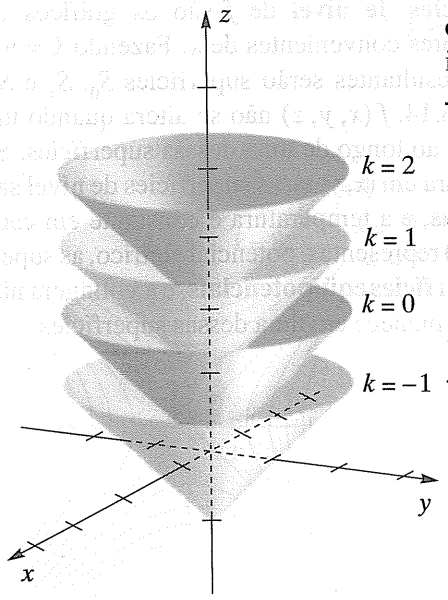



**Figura 16.15** Superfícies de nível: $z - \sqrt{x^2 + y^2} = k$.

## EXEMPLO 6

Se $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, descreva as superfícies de nível de $f$.

## SOLUÇÃO

As superfícies de nível são gráficos de equações da forma $f(x, y, z) = k$ – isto é, de

$$x^2 - y^2 + z^2 = k$$

em que $k$ é um número real. A tabela a seguir descreve essas superfícies.

| Valor de $k$ | Equação da superfície de nível | Descrição da superfície |
|---|---|---|
| $k > 0$ | $x^2 - y^2 + z^2 = k$ | Hiperbolóide de uma folha com eixo ao longo do eixo-$y$. |
| $k = 0$ | $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ | Cone com eixo ao longo do eixo-$y$. |
| $k < 0$ | $-x^2 + y^2 - z^2 = -k$ | Hiperbolóide de duas folhas com eixo ao longo do eixo-$y$. |

A Figura 16.16 ilustra uma superfície de nível de cada tipo.

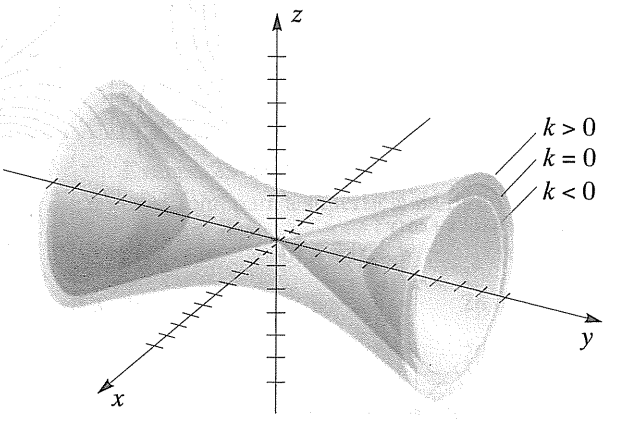
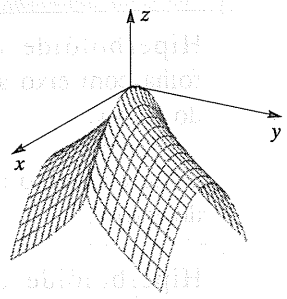


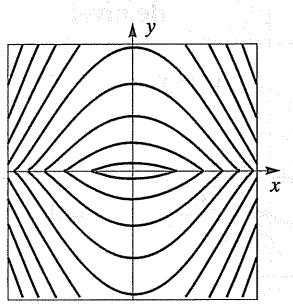

**Figura 16.16**

Os computadores podem ser programados para exibir curvas de nível e traços de superfícies em vários planos, e para representar superfícies de diversas perspectivas. Os esboços desses tipos são chamados *gráficos de computador* ou *gráficos gerados por computador*. A Figura 16.17 e os Exercícios 29-45 mostrados a seguir ilustram vários casos obtidos por meio de um computador.

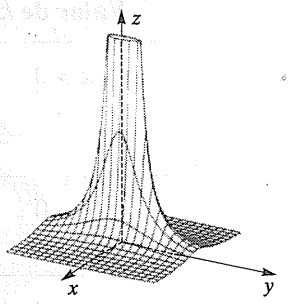
**(i)** $z = -\left(x^2 + y^{2/3}\right)$



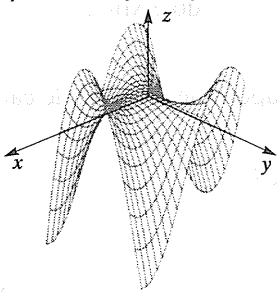

**(ii)** Curvas de nível: $k = -\left(x^2 + y^{2/3}\right)$



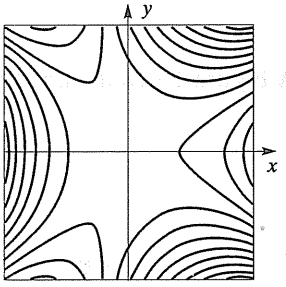

**(iii)** $z = \dfrac{1}{9x^2 + y^2}$



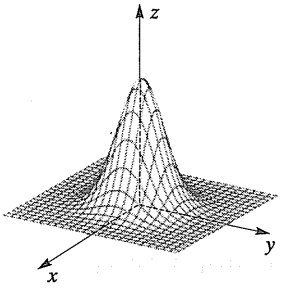

**(iv)** $z = x^3 - 2xy^2 - x^2y^2$



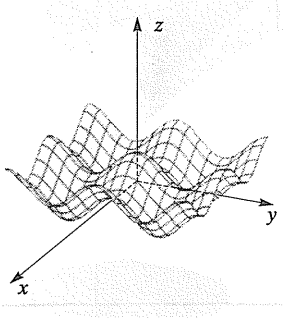

**(v)** Curvas de nível: $k = x^3 - 2xy^2 - x^2 - y^2$



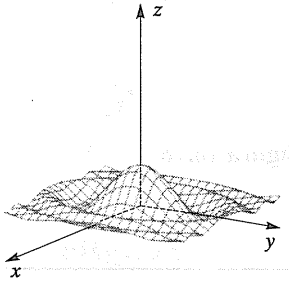

**(vi)** $z = 8e^{-\left(x^2+y^2\right)/4}$



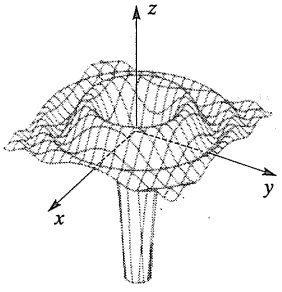

**(vii)** $z = \cos x + \cos y$



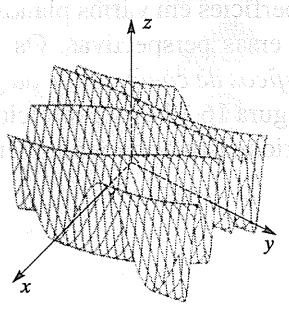

**(viii)** $z = \dfrac{\frac{1}{2}\cos\left(2x^2 + y^2\right)}{1 + 2x^2 + y^2}$



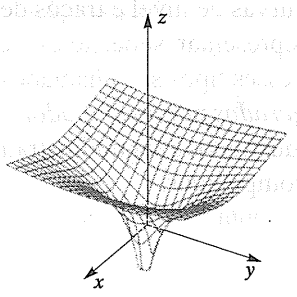

**(ix)** $z = \dfrac{1 - 2\cos\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$




**(x)** $z = \cos x + 3\cos(3x + y)$




**(xi)** $z = \ln\left(2x^2 + y^2\right)$




**(xii)**

$$z = \begin{cases} \sqrt{1-y^2} & \text{se } |x| \geq 1 \text{ e } |y| \leq 1 \text{ ou} \\ & \text{se } |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq |x| \\ \sqrt{1-x^2} & \text{se } |y| \geq 1 \text{ e } |x| \leq 1 \text{ ou} \\ & \text{se } |y| \leq 1 \text{ e } |x| \leq |y| \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \text{ e } |y| \geq 1 \end{cases}$$

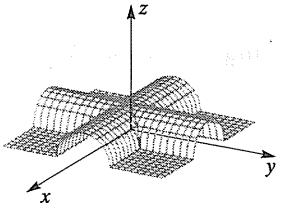



**Figura 16.17**

## EXERCÍCIOS 16.1

**Exercs. 1-6:** Descreva o domínio de $f$ e ache os valores funcionais indicados.

**1** $f(x, y) = 2x - y^2$; $f(-2, 5), f(5, -2), f(0, -2)$

**2** $f(x, y) = \dfrac{y + 2}{x}$; $f(3, 1)$, $f(1, 3)$, $f(2, 0)$

**3** $f(u, v) = \dfrac{uw}{u - 2v}$; $f(2, 3)$, $f(-1, 4)$, $f(0, 1)$

**4** $f(r, s) = \sqrt{1 - r} - e^{r/s}$; $f(1, 1), f(0, 4), f(-3, 3)$

**5** $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$; $f(1, -2, 2)$, $f(-3, 0, 2)$

**6** $f(x, y, z) = 2 + \operatorname{tg} x + y \operatorname{sen} z$; $f(\pi/4, 4, \pi/6)$, $f(0, 0, 0)$

**Exercs. 7-14: Esboce o gráfico de $f$.**

**7** $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

**8** $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$

**9** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

**10** $f(x, y) = \frac{1}{6}\sqrt{9x^2 + 4y^2}$

**11** $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

**12** $f(x, y) = \sqrt{72 + 4x^2 - 9y^2}$

**13** $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 4x^2 - 16}$

**14** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 25}$

**Exercs. 15-20:** Esboce as curvas de nível de $f$ para os valores dados de $k$.

**15** $f(x, y) = y^2 - x^2$; $k = -4, 0, 9$

**16** $f(x, y) = 3x - 2y$; $k = -4, 0, 6$

**17** $f(x, y) = x^2 - y$; $k = -2, 0, 3$

**18** $f(x, y) = xy$; $k = -4, 1, 4$

**19** $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$; $k = 1, 4, 9$

**20** $f(x, y) = 4x^2 + y^2$; $k = 4, 9, 16$

**Exercs. 21-22:** Ache a equação da curva de nível de $f$ que contém o ponto $P$.

**21** $f(x, y) = y \operatorname{arctg} x$; $P(1, 4)$

**22** $f(x, y) = (2x + y^2)e^{xy}$; $P(0, 2)$

**Exercs. 23-24:** Ache a equação da superfície de nível de $f$ que contém o ponto $P$.

**23** $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2$; $P(2, -1, 3)$

**24** $f(x, y, z) = z^2y + x$; $P(1, 4, -2)$

**Exercs. 25-28:** Descreva as curvas de nível, quando existirem, para a superfície da figura indicada, se

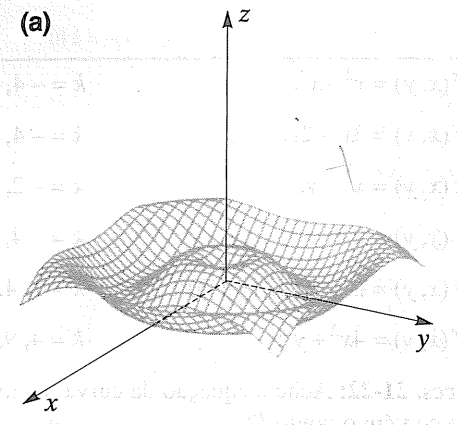
(a) $k > 0$, (b) $k = 0$ e (c) $k < 0$.

**25** Figura 16.17(iii) **26** Figura 16.17(xi)

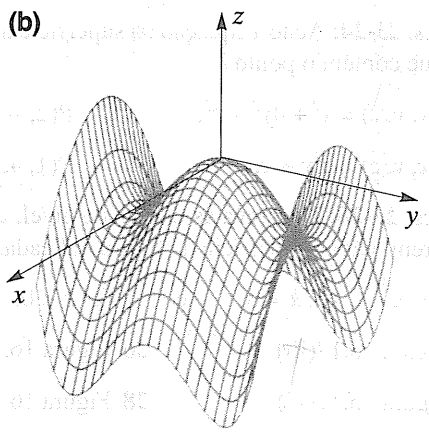
**27** Figura 16.17(vi) **28** Figura 16.17(xii)

**Exercs. 29-34:** Estabeleça a correspondência correta entre os gráficos (a)-(f) e o sistema de curvas de nível da função dada por $z = f(x, y)$.

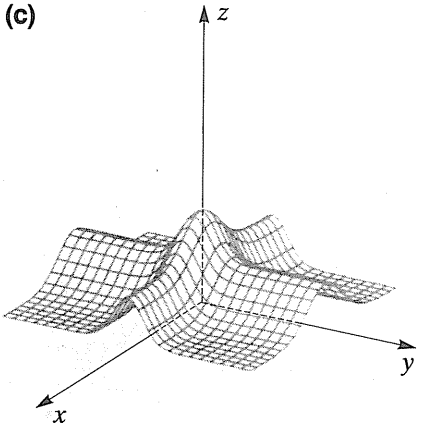
(a)



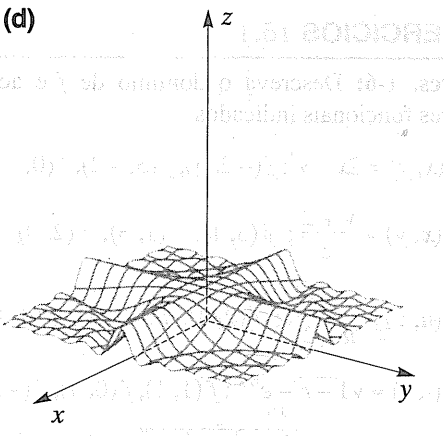

(b)



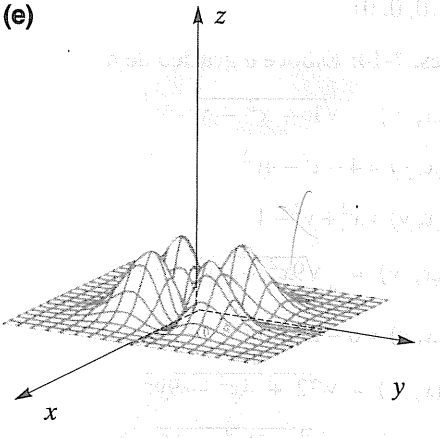

(c)



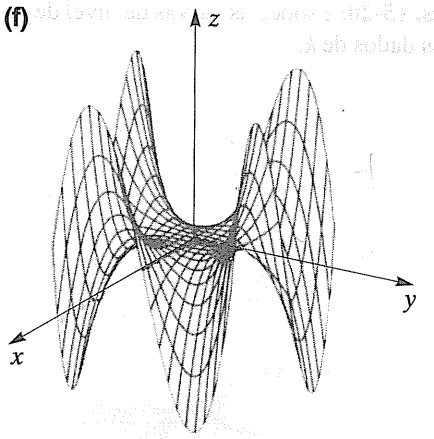

(d)



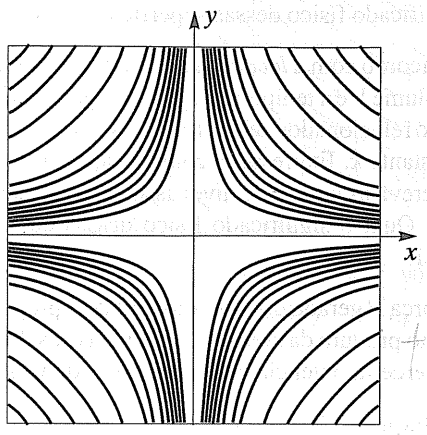

(e)



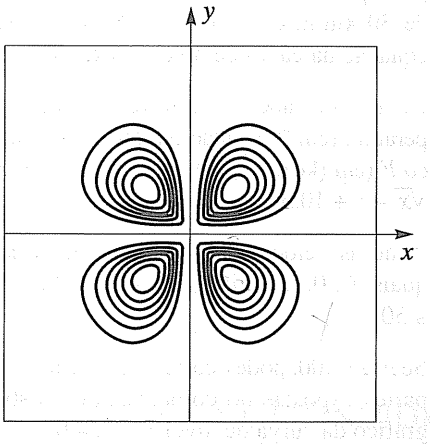

(f)



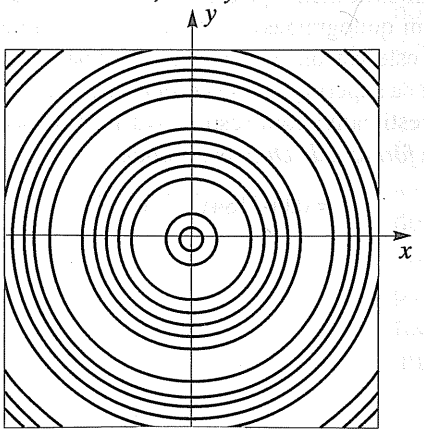
**29** $z = \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}$



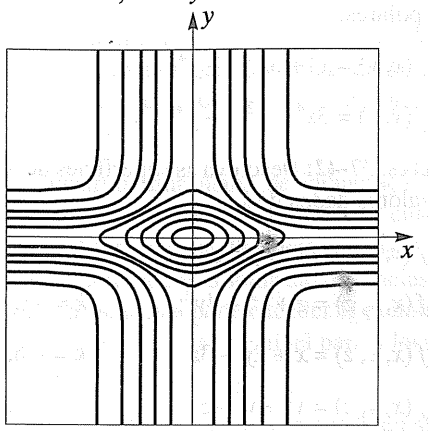

**30** $z = \dfrac{15x^2y^2e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$



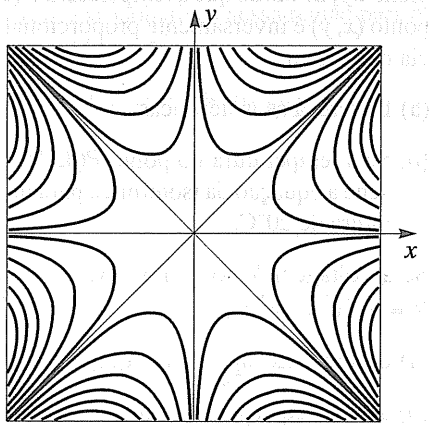

**31** $z = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}$;
$-7 \le x \le 7,\ -7 \le y \le 7$



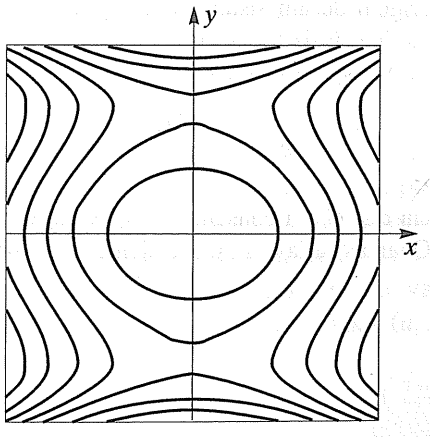

**32** $z = e^{-x^2} + e^{-4y^2}$;
$-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$




**33** $z = \dfrac{xy^3 - x^3y}{2}$;
$-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$




**34** $z = y^4 - 8y^2 - 4x^2$;
$-3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3$



**Exercs. 35-36:** Grafe, no mesmo plano coordenado, as curvas de nível para $k = 1, 2$ e 3, usando coordenadas polares.

**35** $f(x, y) = x^4 + 8x^2y^2 + y^4$

**36** $f(x, y) = 3x^4 + x^2y^2 + y^4$

**Exercs. 37-42:** Descreva as superfícies de nível $f$ para os valores dados de $k$.

**37** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $k = -1, 0, 4$

**38** $f(x, y, z) = z + x^2 + 4y^2$; $k = -1, 0, 2$

**39** $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$; $k = -6, 6, 12$

**40** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$; $k = -1, 0, 1$

**41** $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; $k = -1, 0, 4$

**42** $f(x, y, z) = z$; $k = -2, 0, 3$

**43** Uma chapa plana de metal está situada em um plano-$xy$, de modo que a temperatura $T$ (em °C) no ponto $(x, y)$ é inversamente proporcional à distância da origem.

(a) Descreva as isotérmicas.

(b) Se a temperatura no ponto $P(4, 3)$ é de 40°C, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de 20°C.

**44** Se a voltagem $V$ no ponto $P(x, y, z)$ é dada por $V = 6/(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}$,

(a) descreva as superfícies eqüipotenciais.

(b) ache a equação da superfície eqüipotencial $V = 120$.

**45** De acordo com a lei da gravitação universal de Newton, se uma partícula de massa $m_0$ está na origem de um sistema coordenado $xyz$, então o módulo $F$ da força exercida sobre uma partícula de massa $m$ situada no ponto $(x, y, z)$ é dada por

$$F = \frac{Gm_0m}{x^2 + y^2 + z^2}$$

em que $G$ é a constante de gravitação universal. Quantas variáveis independentes estão presentes? Se $m_0$ e $m$ são constantes, descreva as superfícies de nível da função de $x$, $y$, $z$ resultante. Qual o significado físico dessas superfícies de nível?

**46** De acordo com a *lei dos gases ideais*, a pressão $P$, o volume $V$ e a temperatura $T$ de um gás confinado estão relacionados pela fórmula $PV = kT$, para uma constante $k$. Expresse $P$ como função de $V$ e $T$ e descreva as curvas de nível associadas a esta função. Qual o significado físico dessas curvas de nível?

**47** A força $P$ gerada por um rotor eólico é proporcional ao produto da área $A$ varrida pelas pás do rotor e à terceira potência da velocidade $v$ do vento.

(a) Expresse $P$ como função de $A$ e $v$.

(b) Descreva as curvas de nível de $P$ e explique seu significado físico.

(c) Quando o diâmetro da área circular varrida pelas pás é 2 metros e a velocidade do vento é de 30 km/h, então $P$ = 3.000 watts. Ache a equação da curva de nível $P$ = 4.000.

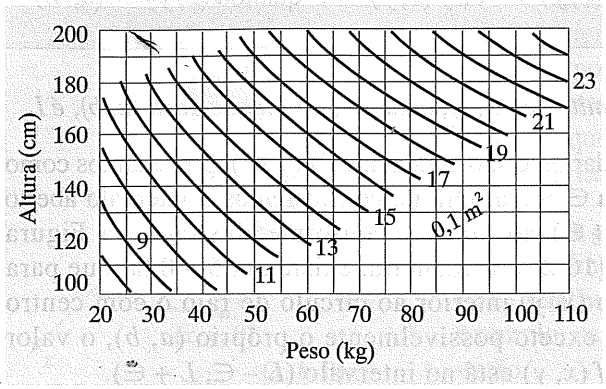
**48** Se $x$ é a velocidade do vento (em m/seg) e $y$ é a temperatura (em °C), então o *fator de resfriamento eólico* $F$ (em (kcal/m$^2$)/hr) é dado por $F = (33 - y)(10\sqrt{x} - x + 10{,}5)$.

(a) Ache as velocidades e temperaturas para as quais $F$ é 0. (Admita que $0 \le x \le 50$ e $-50 \le y \le 50$.)

(b) Se $F \ge 1.400$, pode ocorrer o congelamento em partes expostas do corpo humano. Esboce o gráfico da curva de nível $F$ = 1.400.

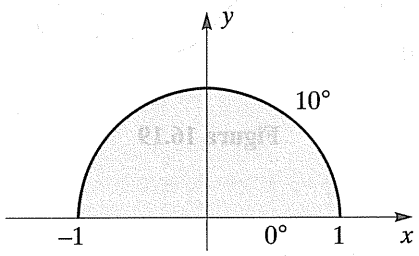
**49** A figura da página seguinte exibe curvas de nível para a área da superfície do corpo humano (em décimos de metro quadrado) como função do peso $x$ (em quilogramas) e altura $y$ (em centímetros). Use este sistema de curvas de nível para estimar a área da superfície do seu próprio corpo. Compare esta estimativa com a estimativa mais precisa dada pela *fórmula de Dubois e Dubois*

$$S = 0{,}007184x^{0{,}425}y^{0{,}725}$$




**50** A fronteira superior da região semicircular da figura é mantida à temperatura de 10°C, enquanto a fronteira inferior é mantida em 0°C. A temperatura de *estado estacionário* $T$ em um ponto $(x, y)$ interior à região é dada por

$$T(x, y) = \frac{20}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\right)$$




Mostre que as isotérmicas são arcos de círculos com centros no eixo-$y$ negativo e que passam pelos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Esboce a isotérmica correspondente à temperatura de 5°C.

**51** Deve-se construir uma usina de incineração de lixo para atender a duas cidades. Cada cidade gostaria de maximizar sua distância à usina, mas, por motivos econômicos, a soma das distâncias de cada cidade à usina não pode exceder $M$ quilômetros. Mostre que as curvas de nível para a localização da usina são elipses.

**52** A pressão atmosférica nas proximidades do solo em certa região é dada por

$$p(x, y) = ax^2 + by^2 + c$$

em que $a$, $b$ e $c$ são constantes positivas.

(a) Descreva as isobáricas nessa região para pressões superiores a $c$.

(b) Trata-se de uma região de alta ou baixa pressão?

## 16.2 LIMITES E CONTINUIDADE

Se $f$ é uma função de duas variáveis, podem interessar-nos as mudanças nos valores funcionais $f(x, y)$ quando $(x, y)$ varia no domínio $D$ e $f$. Como ilustração física, suponha que uma chapa metálica plana tenha a forma da região $D$ da Figura 16.18. A cada ponto $(x, y)$ da chapa corresponde uma temperatura $f(x, y)$, que é registrada em um termômetro representado pelo eixo-$w$. Quando o ponto $(x, y)$ se move na chapa, a temperatura pode aumentar, diminuir ou permanecer constante; portanto, o ponto do eixo-$w$ que corresponde a $f(x, y)$ se moverá numa direção positiva, ou numa direção negativa, ou permanecerá fixo, respectivamente. Se a temperatura $f(x, y)$ se aproxima de um valor fixo $L$ quando $(x, y)$ se aproxima de um ponto fixo $(a, b)$, utilizamos a seguinte notação.

**Notação de limite (16.2)**

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \text{ ou } f(x,y) \to L \text{ quando } (x,y) \to (a,\ b)$$

Lê-se: *O limite de f(x, y), quando (x, y) tende para (a, b), é L.*

Para dar precisão matemática a (16.2), procedamos como segue. Para $\in > 0$ arbitrário, consideremos o intervalo aberto $(L - \in,\ L + \in)$ no eixo-$w$, conforme ilustrado na Figura 16.19. Se (16.2) é verdadeira, existe um $\delta > 0$ tal que para todo ponto $(x, y)$ interior ao círculo de raio $\delta$ com centro em $(a, b)$, exceto possivelmente o próprio $(a, b)$, o valor funcional $f(x, y)$ está no intervalo $(L - \in,\ L + \in)$.

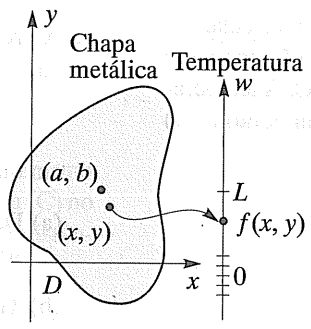



**Figura 16.18**

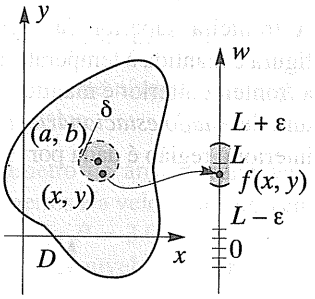



**Figura 16.19**

Isto equivale à seguinte afirmação:

$$\text{Se } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta, \text{ então } |f(x,y) - L| < \in.$$

Temos, assim, o seguinte:

**Definição de limite (16.3)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis definida em todo o interior de um círculo de centro $(a, b)$, exceto possivelmente no próprio $(a, b)$. A afirmação

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

significa que, para todo $\in > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, $|f(x,y) - L| < \in$.

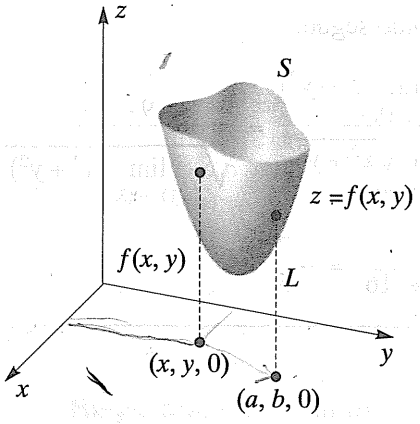



**Figura 16.20**

Consideremos o gráfico $S$ de $f$ ilustrado na Figura 16.20. Intuitivamente sabemos que a Definição (16.3) significa que, quando o ponto $(x, y, 0)$ se aproxima de $(a, b, 0)$ no plano-$xy$, o ponto correspondente $(x, y, f(x, y))$ em $S$ se aproxima de $(a, b, L)$ (que pode estar, ou não, em $S$). Pode-se mostrar que, se *o limite L existe, ele é único.*

Se $f$ e $g$ são funções de duas variáveis, então $f+g, f-g, fg$ e $f/g$ se definem na maneira usual, podendo-se aplicar o Teorema (2.8) relativo a limites de somas, produtos e quocientes. Por exemplo, se $f$ e $g$ têm limites quando $(x, y)$ tende para $(a, b)$, então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y),$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \quad \text{se} \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt{f(x,y)} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)} \quad \text{se} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) > 0$$

etc.

Uma função $f$ de duas variáveis é uma **função polinomial** se $f(x, y)$ pode ser expressa como soma de termos da forma $cx^m y^n$, em que $c$ é um número real e $m$ e $n$ são inteiros não-negativos. Uma **função racional** é o quociente de duas funções polinomiais. Tal como no caso de funções de uma variável, podem-se achar limites de funções polinomiais e racionais em duas variáveis mediante substituição em relação a $x$ e $y$.

## EXEMPLO 1

Ache

**(a)** $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7)$

**(b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

## SOLUÇÃO

**(a)** Como $x^3 - 4xy^2 + 5y - 7$ é um polinômio, podemos achar o limite substituindo $x$ por 2 e $y$ por $-3$. Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7) = 2^3 - 4(2)(-3)^2 + 5(-3) - 7$$

$$= 8 - 72 - 15 - 7 = -86$$

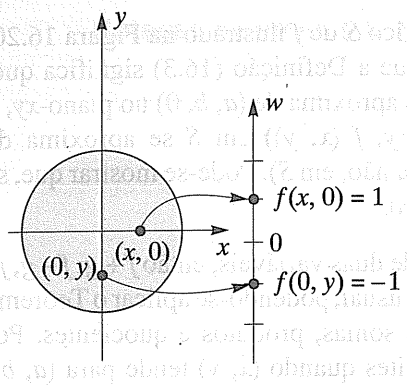



**Figura 16.21**

**(b)** Podemos proceder como segue:

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} (x^2-y^2)}{\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{9-16}{\sqrt{\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} (x^2+y^2)}}$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{9+16}} = -\frac{7}{5}$$

## EXEMPLO 2

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

## SOLUÇÃO

Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

A função $f$ é racional; mas não podemos substituir $x$ por 0 e $y$ por 0, pois obteríamos um zero no denominador.

Considerando um ponto arbitrário $(x, 0)$ no eixo-$x$, então

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1, \text{ desde que } x \neq 0$$

Para um ponto arbitrário $(0, y)$ no eixo-$y$, temos

$$f(0, y) = \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1, \text{ desde que } y \neq 0$$

Conseqüentemente, conforme Figura 16.21, *todo* círculo de centro (0, 0) contém pontos em que o valor de $f$ é 1 e pontos em que o valor de $f$ é $-1$. Segue-se que o limite não existe, pois, se tomarmos $\in = 1$ na Definição (16.3), não há nenhum intervalo aberto $(L - \in, L + \in)$ no eixo-$w$ que contenha 1 e $-1$. Logo, é impossível achar um $\delta > 0$ que satisfaça as condições da definição.

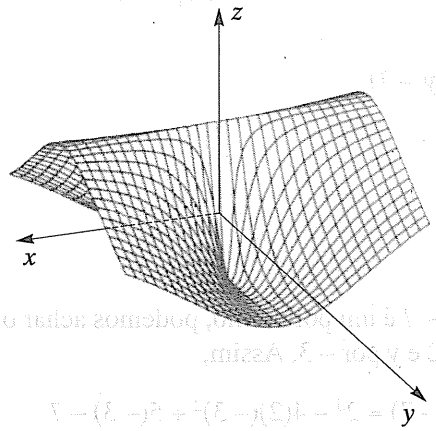



**Figura 16.22**

A Figura 16.22 é um gráfico de $f$ gerado por computador. Note que, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, o gráfico contém todos os pontos $(x, 0, 1)$ e $(0, y, -1)$, como já observamos. Pode-se mostrar que o gráfico está inteiramente entre os planos $z = -1$ e $z = 1$.

No Capítulo 2, para uma função de uma variável com descontinuidade tipo salto em $x = a$, provamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe mostrando que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ não são iguais. Ao

considerar tais limites laterais, podemos admitir o ponto de coordenada $x$ no eixo-$x$ tendendo para o ponto de coordenada $a$ seja pela direita, seja pela esquerda, respectivamente. A situação análoga para funções de duas variáveis já é mais complicada, pois em um plano há um número infinito de curvas, ou **caminhos**, ao longo dos quais $(x, y)$ pode tender para $(a, b)$, conforme ilustrado na Figura 16.23. Todavia, se o limite na Definição (16.3) existe, então $f(x, y)$ deve ter o limite $L$, independentemente do caminho considerado. Isto justifica a seguinte regra para investigar limites.

**Regra dos dois caminhos (16.4)**

Se dois caminhos diferentes para um ponto $(a, b)$ resulta em dois limites diferentes, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ não existe.

Refaremos agora o Exemplo 2 utilizando (16.4).

**EXEMPLO 3**

Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

**SOLUÇÃO**

Se $P(x, y)$ tende para (0, 0) ao longo do eixo-$x$ (ver Figura 16.24(i)), a coordenada-$y$ de $P$ é sempre zero e a expressão $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ se reduz a $x^2/x^2$ ou 1. Logo, o valor limite ao longo deste caminho é 1.

Se $P(x, y)$ tende para (0, 0) ao longo do eixo-$y$ (ver Figura 16.24(ii)), a coordenada-$x$ de $P$ é 0 e $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ se reduz a $-y^2/y^2$, ou $-1$. Como obtivemos dois valores diferentes, o limite não existe, de acordo com a regra dos dois caminhos (16.4).

Poderíamos, naturalmente, ter escolhido outros caminhos até a origem (0, 0). Por exemplo, fazendo $P(x, y)$ tender para (0, 0) ao longo da reta $y = 2x$ (ver Figura 16.24(iii)), então

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - (2x)^2}{x^2 + (2x)^2} = \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}$$

é o limite ao longo da reta $y = 2x$ é $-\frac{3}{5}$.

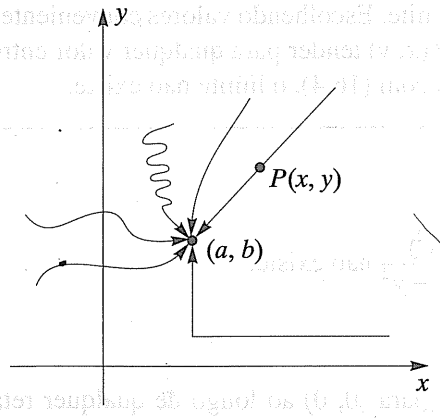



**Figura 16.23**

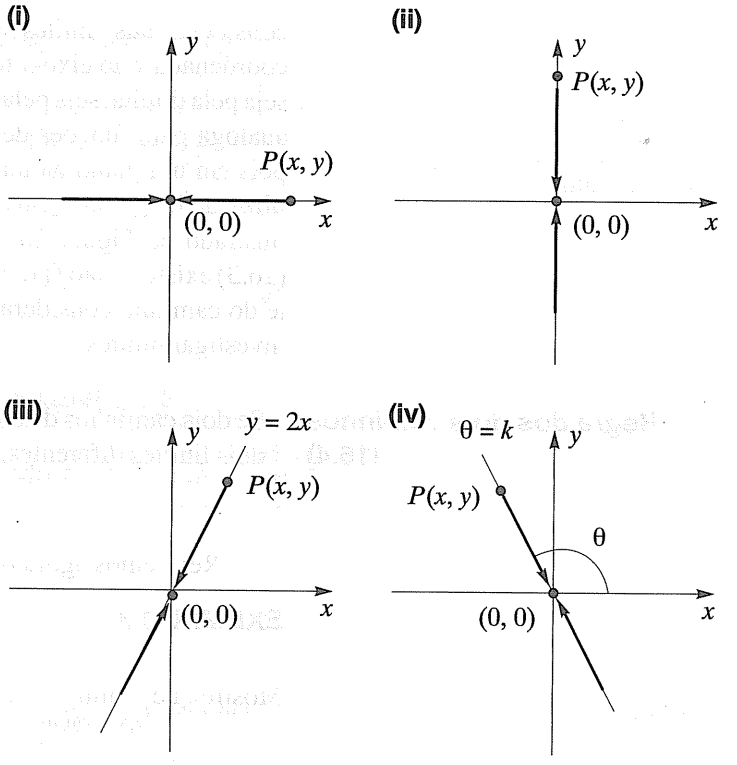



**Figura 16.24**

Como solução alternativa, poderíamos escrever a expressão em $x$ e $y$ em coordenadas polares:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\cos 2\theta$$

Ao tender $P(x, y)$ para $(0, 0)$ ao longo de qualquer raio $\theta = k$ (ver Figura 16.24(iv)), o valor da função é sempre $\cos 2k$ e, então, $f(x, y)$ teria este valor limite. Escolhendo valores convenientes de $k$, poderíamos fazer $f(x, y)$ tender para qualquer valor entre $-1$ e $1$. Logo, de acordo com (16.4), o limite não existe.

---

## EXEMPLO 4

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ não existe.

## SOLUÇÃO

Fazendo $P(x, y)$ tender para $(0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$ que passe pela origem (ver Figura 16.25(i)), vemos que, se $m \neq 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx}{x^2+m^2} = \frac{0}{0+m^2} = 0$$

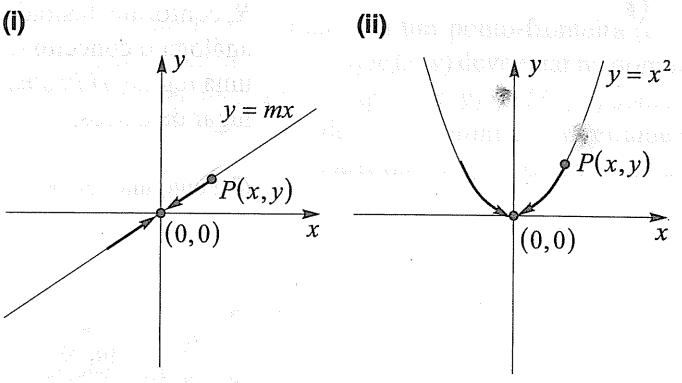



**Figura 16.25**

Poderíamos ser tentados a concluir que o limite é 0 quando $(x, y)$ tende para (0, 0); entretanto, se fizermos $P(x, y)$ tender para (0, 0) ao longo da parábola $y = x^2$ (ver Figura 16.25(ii)), então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Assim, nem todo caminho para (0, 0) conduz ao mesmo limite e, portanto, pela regra (16.4), o limite não existe.

---

Se, na solução precedente, tivéssemos obtido o limite 0 seguindo o caminho $y = x^2$, ainda assim não poderíamos concluir que o limite fosse 0 quando $P(x, y) \to (0, 0)$, porque poderia haver *outro* caminho que levasse a um número diferente de zero. Tenha em mente que a regra dos dois caminhos não pode ser usada para provar a existência de um limite – ela prova apenas que um limite *não* existe.

Ao estudar propriedades de uma função de duas variáveis, em geral restringimos o domínio a pontos $(x, y)$ que estejam em certos tipos de região do plano-$xy$. Em particular, um **disco aberto** consiste em todos os pontos *interiores* a um círculo. Um

**disco fechado** contém tanto os pontos interiores como os pontos fronteira do círculo. Um ponto $(a, b)$ é **ponto interior** de uma região $R$ se existe um disco aberto com centro em $(a, b)$ inteiramente contido em $R$. A Figura 16.26(i) ilustra um ponto interior. Um ponto $(a, b)$ é **ponto-fronteira** de $R$ se todo disco de centro $(a, b)$ contém pontos que estão em $R$ e pontos que não estão em $R$, conforme ilustrado na Figura 16.26(ii). Define-se de maneira análoga o conceito de ponto interior (ou fronteira) $(a, b, c)$ em uma região *tridimensional* $R$, utilizando-se regiões esféricas em lugar de discos.

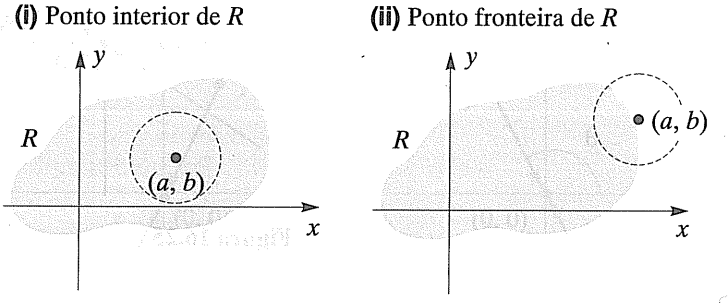



**Figura 16.26**

Uma região **fechada** é uma região que contém todos os seus pontos-fronteira. Uma região é **aberta** se não contém *nenhum* de seus pontos-fronteira – isto é, todo ponto da região é ponto interior. Uma região que contém apenas alguns dos seus pontos-fronteira não é aberta nem fechada. Estes conceitos são análogos aos de intervalo fechado, aberto e semi-aberto de números reais.

Suponhamos uma função $f$ de duas variáveis definida para todo $(x, y)$ em uma região $R$, exceto possivelmente em $(a, b)$. Se $(a, b)$ é um ponto interior, então pode-se usar a Definição (16.3) para investigar o limite de $f$ quando $(x, y)$ tende para $(a, b)$. *Se $(a, b)$ é um ponto-fronteira, utilizaremos a Definição (16.3) com a restrição adicional que $(x, y)$ deve estar tanto em $R$ como dentro de um círculo de raio* $\delta$. Os teoremas sobre limites podem ser estendidos a pontos fronteira.

A definição de continuidade de uma função $f$ de duas variáveis é análoga à de uma função de uma variável (ver Definição (2.20)).

**Definição (16.5)**

Uma função $f$ de duas variáveis é **contínua** em um ponto interior $(a, b)$ de seu domínio se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Para definir continuidade em um ponto-fronteira $(a, b)$, devemos acrescentar a restrição que $(x, y)$ deve estar no domínio $D$ de $f$. Intuitivamente, sabemos que $f(x, y) \to f(a, b)$ somente se $(x, y) \to (a, b)$ ao longo de todo caminho $C$ inteiramente contido em $D$. A função $f$ é **contínua em seu domínio** $D$ se é contínua em todo par $(a, b)$ em $D$. Se $f$ é contínua em $D$, então uma pequena variação em $(x, y)$ acarretará uma pequena variação em $f(x, y)$. Olhando o gráfico $S$ de $f$ (ver Figura (16.20)), notamos que, se $f(x, y)$ está próxima de $(a, b)$, então o ponto $(x, y, f(x, y))$ em $S$ está próximo de $(a, b, f(a, b))$. Assim, não há buracos, nem saltos verticais, no gráfico de uma função contínua de duas variáveis.

Podemos provar teoremas sobre a continuidade de funções de duas variáveis, análogos aos relativos a funções de uma variável. Assim é que somas, produtos e quocientes de funções contínuas são contínuas, desde que o denominador não seja zero no caso do quociente. Em particular, as funções polinomiais são contínuas em todos os pontos; são-no também as funções racionais, exceto em pontos onde o denominador se anula.

O que acima se diz sobre limites e continuidade pode ser estendido a funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se $f$ é uma função de três variáveis, temos a definição seguinte.

**Definição (16.6)**

Seja uma função $f$ de três variáveis definida em todo o interior de uma esfera com centro $(a, b, c)$, exceto possivelmente no próprio ponto $(a, b, c)$. A afirmação

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = L$$

significa que, para todo $\in > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$$

então $$|f(x,y,z) - L| < \in$$

Podemos dar uma ilustração gráfica da Definição (16.6) análoga à ilustrada na Figura 16.19. A diferença é que, em lugar do *círculo* no plano-$xy$, utilizamos uma *esfera* de raio $\delta$ em um sistema coordenado $xyz$. Especificamente, para $\in > 0$ arbitrário,

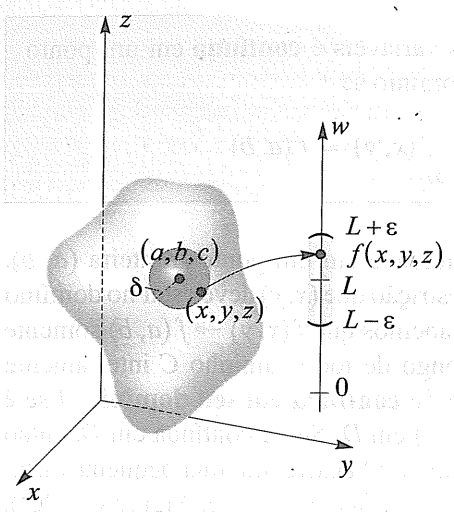



**Figura 16.27**

consideremos o intervalo aberto $(L-\in, L+\in)$ no eixo-$w$, como na Figura 16.27. Se (16.6) é verdadeira, então existe um $\delta > 0$ tal que, para todo ponto $(x, y, z)$ interior à esfera de raio $\delta$ e centro $(a, b, c)$ exceto possivelmente o próprio $(a, b, c)$, $f(x, y, z)$ está no intervalo $(L-\in, L+\in)$.

A definição de limite (16.6) pode ser estendida a um ponto fronteira $(a, b, c)$ de uma região $R$ acrescentando-se a restrição que $(x, y, z)$ esteja tanto em $R$ como no interior de uma esfera de raio $\delta$.

A regra dos dois caminhos (16.4) pode ser estendida a funções de três variáveis. No próximo exemplo utilizaremos esta regra para mostrar a inexistência de um limite.

## EXEMPLO 5

Mostre que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \dfrac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)}$ não existe.

## SOLUÇÃO

Suponhamos que $P(x, y, z)$ tenda para $(1, 2, -1)$ ao longo da reta $l$ paralela ao vetor $\langle a, b, c\rangle$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais. Por (14.34), as equações paramétricas de $l$ são

$$x = 1 + at,\ y = 2 + bt,\ z = -1 + ct;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

Logo, para qualquer $P(x, y, z)$ em $l$ diferente de $(1, 2, -1)$,

$$\frac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)} = \frac{(at+bt+3ct)^3}{(at)(bt)(ct)}$$

$$= \frac{(a+b+3c)^3t^3}{abct^3} = \frac{(a+b+3c)^3}{abc}$$

Atribuindo diferentes valores a $a$, $b$ e $c$ – isto é, caminhando para $(1, 2, -1)$ ao longo de diferentes trajetos – obtemos limites diferentes. Logo, pela regra dos dois caminhos, o limite não existe.

---

Uma função $f$ de três variáveis é **contínua** em um ponto interior $(a, b, c)$ de uma região se

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

A continuidade em um ponto fronteira se define por meio da extensão da Definição (16.6) a pontos fronteira.

Pode-se estender a definição de limite a funções de quatro ou mais variáveis; todavia, aqui não damos interpretações geométricas.

Na Seção 16.5 estudaremos funções compostas de diversas variáveis. Com ilustração simples, sejam $f$ uma função de duas variáveis $x$ e $y$ e $g$ uma função de uma variável $t$. Pode-se obter uma função $h$ de duas variáveis substituindo $t$ por $f(x, y)$ – isto é, fazendo $h(x, y) = g(f(x, y))$ – desde que o contradomínio de $f$ esteja no domínio de $g$. O próximo exemplo ilustra o assunto.

**EXEMPLO 6**

Expresse $g(f(x, y))$ em termos de $x$ e $y$ e ache o domínio da função composta resultante.

**(a)** $f(x, y) = xe^y$, $g(t) = 3t^2 + t + 1$

**(b)** $f(x, y) = y - 4x^2$, $g(t) = \operatorname{sen}\sqrt{t}$

**SOLUÇÃO**

Em cada caso, substituímos $t$ por $f(x, y)$ na expressão de $g(t)$:

**(a)** $g(f(x, y)) = g(xe^y) = 3x^2e^{2y} + xe^y + 1$

**(b)** $g(f(x, y)) = g(y - 4x^2) = \operatorname{sen}\sqrt{y - 4x^2}$

O domínio em (a) é $\mathbb{R}^2$, e o domínio em (b) consiste em todos os pares ordenados $(x, y)$ tais que $y \geq 4x^2$.

---

Pode-se provar o seguinte análogo do Teorema (2.24) para funções do tipo ilustrado no Exemplo 6.

**Teorema (16.7)**

Se uma função $f$ de duas variáveis é contínua em $(a, b)$ e uma função $g$ de uma variável é contínua em $f(a, b)$, então a função $h$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ é contínua em $(a, b)$.

O Teorema (16.7) permite estabelecer a continuidade de funções compostas de diversas variáveis, conforme ilustrado no próximo exemplo.

**EXEMPLO 7**

Se $h(x, y) = e^{x^2 + 5xy + y^3}$, mostre que $h$ é contínua em todo par $(a, b)$.

**SOLUÇÃO**

Fazendo $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^3$ e $g(t) = e^t$, segue-se que $h(x, y) = g(f(x, y))$. Como $f$ é uma função polinomial, é contínua em todo par $(a, b)$. Além disso, $g$ é contínua em todo $t = f(a, b)$. Assim, pelo Teorema (16.7), $h$ é contínua em $(a, b)$.

---

## EXERCÍCIOS 16.2

**Exercs. 1-10:** Ache o limite.

**1** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2}{3+xy}$

**2** $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4+x}{2-y}$

**3** $\lim_{(x,y)\to(\pi/2,1)} \dfrac{y+1}{2-\cos x}$

**4** $\lim_{(x,y)\to(-1,3)} \dfrac{y^2+x}{(x-1)(y+2)}$

**5** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

**6** $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y}$

**7** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2}$

**8** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-x^2y+xy^2x-y^3}{x^2+y^2}$

**9** $\lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \dfrac{y^2-4y+3}{x^2z(y-3)}$

**10** $\lim_{(x,y,z)\to(2,1,2)} \dfrac{x^2-z^2}{x^3-z^3}$

**Exercs. 11-20:** Mostre que o limite não existe.

**11** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

**12** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$

**13** $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

**14** $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^2-4x+4}{xy-2y-x+2}$

**15** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y^3}{2y^5-2x^5}$

**16** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{5x^4+2y^4}$

**17** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

**18** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{2x^2+3y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$

**19** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$

**20** $\lim_{(x,y,z)\to(2,1,0)} \dfrac{(x+y+z-3)^5}{z^3(x-2)(y-1)}$

**Exercs. 21-24:** Use coordenadas polares para achar o limite, caso exista.

**21** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

**22** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

**23** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

**24** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{senh}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

**Exercs. 25-28:** Descreva o conjunto dos pontos do plano $xy$ em que $f$ é contínua.

**25** $f(x,y) = \ln(x+y-1)$

**26** $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

**27** $f(x,y) = \sqrt{x}\,e^{\sqrt{1-y^2}}$

**28** $f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$

**Exercs. 29-32:** Descreva o conjunto de pontos em um sistema coordenado $xyz$ em que $f$ é contínua.

**29** $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$

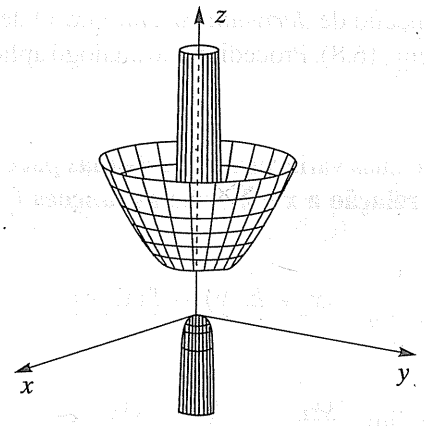
**30** $f(x,y,z) = \sqrt{xy}\ \operatorname{tg} z$

**31** $f(x,y,z) = \sqrt{x-2}\ \ln(yz)$

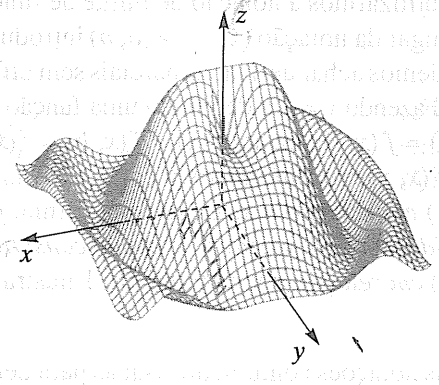
**32** $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$

**Exercs. 33-34:** A figura exibe o gráfico de $f$. Use coordenadas polares para investigar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

**33** $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\ln (x^2 + y^2)}$




**34** $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} (2x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$




**Exercs. 35-38:** Ache $h(x, y) = g(f(x, y))$ e use o Teorema (16.7) para determinar onde $h$ é contínua.

**35** $f(x, y) = x^2 - y^2$; $g(t) = (t^2 - 4)/t$

**36** $f(x, y) = 3x + 2y - 4$; $g(t) = \ln (t + 5)$

**37** $f(x, y) = x + \operatorname{tg} y$; $g(z) = z^2 + 1$

**38** $f(x, y) = y \ln x$; $g(w) = e^w$

**39** Se $f(x, y) = x^2 + 2y$, $g(t) = e^t$, e $h(t) = t^2 - 3t$, ache $g(f(x, y))$, $h(f(x, y))$, e $f(g(t), h(t))$.

**40** Se $f(x, y, z) = 2x + ye^z$ e $g(t) = t^2$, ache $g(f(x, y, z))$.

**41** Se $f(u, v) = uv - 3u + v$, $g(x, y) = x - 2y$, e $k(x, y) = 2x + y$, ache $f(g(x, y), k(x, y))$.

**42** Se $f(x, y) = 2x + y$, ache $f(f(x, y), f(x, y))$.

**43** Estenda a Definição (16.3) a funções de quatro variáveis.

**44** Prove que se $f$ é uma função contínua de duas variáveis e $f(a, b) > 0$, então existe um círculo $C$ no plano-$xy$ com centro $(a, b)$ tal que $f(x, y) > 0$ para todo par $(x, y)$ no domínio de $f$ e interior a $C$.

**45** Prove diretamente pela Definição (16.3) que

(a) $\lim\limits_{(x, y) \to (a, b)} x = a$

(b) $\lim\limits_{(x, y) \to (a, b)} y = b$

**46** Se $\lim\limits_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$ e $c$ é um número real, prove, diretamente pela Definição (16.3), que

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} cf(x, y) = cL$$

## 16.3 DERIVADAS PARCIAIS

No Capítulo 3 definimos a derivada $f'(x)$ de uma função de *uma* variável como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Podemos interpretar esta fórmula como segue. Primeiro, damos um acréscimo $h$ à variável independente $x$; em seguida, dividimos a variação correspondente de $f$, $f(x + h) - f(x)$, por $h$; e, finalmente, fazemos $h$ tender para 0. Podemos aplicar procedimento análogo às funções de diversas variáveis. Dada $f(x, y)$,

primeiro damos a uma das variáveis – digamos, $x$ – um acréscimo $h$; em seguida, dividimos a variação correspondente de $f$, $f(x+h, y) - f(x, y)$, por $h$; e, finalmente, fazemos $h$ tender para 0. Isto nos leva ao conceito de *derivada parcial* $f_x(x, y)$ de $f$ *em relação a* $x$, definido em (16.8). Procedimento análogo aplica-se à variável $y$.

**Definição (16.8)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis. As **derivadas parciais primeiras de $f$ em relação a $x$ e a $y$ são as funções $f_x$ e $f_y$ tais que**

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Na Definição (16.8), $x$ e $y$ são fixos (mas arbitrários) e $h$ é a única variável; daí utilizarmos a notação de limite de funções de uma variável em lugar da notação $(x, y) \to (a, b)$ introduzida na seção anterior. Podemos achar derivadas parciais sem utilizar limites, como segue. Fazendo $y = b$ e definindo uma função $g$ de uma variável por $g(x) = f(x, b)$, então $g'(x) = f_x(x, b) = f_x(x, y)$. Assim, *para achar* $f_x(x, y)$, *consideramos* $y$ *como constante e diferenciamos* $f(x, y)$ *em relação a* $x$. Da mesma forma, *para achar* $f_y(x, y)$, *consideramos a variável* $x$ *como constante e diferenciamos* $f(x, y)$ *em relação a* $y$. O Exemplo 1 ilustra esta técnica.

Dão-se a seguir outras notações comumente usadas para derivadas parciais.

**Notações para derivadas parciais (16.9)**

Se $w = f(x, y)$, então

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} = w_x$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} = w_y$$

$\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ são as *derivadas parciais de* $f$ *em relação a* $x$ *e a* $y$, respectivamente.

**EXEMPLO 1**

Se $f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$, ache

**(a)** $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$

**(b)** $f_x(2, -1)$ e $f_y(2, -1)$

**SOLUÇÃO**

**(a)** Considerando $y$ como constante e diferenciando em relação a $x$:

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3$$

Considerando $x$ como constante e diferenciando em relação a $y$:

$$f_y(x, y) = 2x^3y - 2x^2$$

**(b)** Fazendo $x = 2$ e $y = -1$ em (a), temos

$$f_x(2, -1) = 3(2)^2(-1)^2 - 4(2)(-1) + 3 = 23,$$

$$f_y(2, -1) = 2(2)^3(-1) - 2(2)^2 = -24$$

---

Valem para derivadas parciais fórmulas análogas às das funções de uma variável. Por exemplo, se $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$, então a regra do produto e a regra do quociente para derivadas são

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

ou, em notação inicial,

$$(fg)_x = fg_x + gf_x, \quad \left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{gf_x - fg_x}{g^2}$$

A regra da potência para diferenciação parcial é

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^n) = nu^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x},$$

em que $n$ é um número real. Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos u = -\operatorname{sen} u\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}e^u = e^u\frac{\partial u}{\partial x}$$

etc.

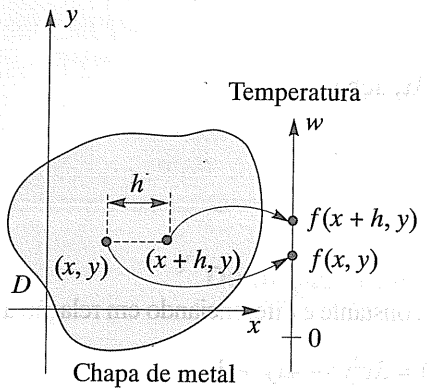



**Figura 16.28**

**EXEMPLO 2**

Ache $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ se $w = xy^2e^{xy}$.

**SOLUÇÃO**

Escrevemos $w = (xy^2)(e^{xy})$ e aplicamos a regra do produto:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + (e^{xy})\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)$$

$$= xy^2(xe^{xy}) + e^{xy}(2xy) = xy(xy + 2)e^{xy}$$

Apliquemos a Definição (16.8) à ilustração física dada no começo da seção anterior: $f(x, y)$ é a temperatura no ponto $(x, y)$ de uma chapa plana de metal no plano-$xy$. Note que os pontos $(x, y)$ e $(x + h, y)$ estão numa horizontal, como se vê na Figura 16.28. Se um ponto se move horizontalmente de $(x, y)$ a $(x + h, y)$, então a diferença $f(x + h, y) - f(x, y)$ é a variação líquida da temperatura, e temos

$$\text{Variação média da temperatura: } \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Por exemplo, se a temperatura varia de 2 graus e a distância $h$ é 4, então a variação média da temperatura de $(x, y)$ a $(x + h, y)$ é $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$. Assim, *em média*, a temperatura varia à taxa de $\frac{1}{2}$ grau por unidade de variação na distância. Tomando o limite da variação média quando $h$ tende para 0, vemos que $f_x(x, y)$ *é a taxa (instantânea) de variação da temperatura em relação à distância, quando o ponto* $(x, y)$ *se move em direção horizontal.*

Analogamente, se um ponto se move segundo uma reta vertical de $(x, y)$ a $(x, h + y)$, conforme Figura 16.29, obtemos

$$\text{Variação média da temperatura: } \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

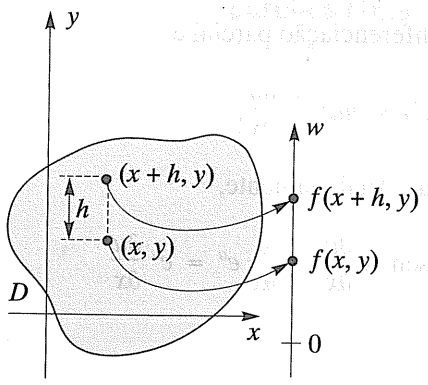



**Figura 16.29**

Fazendo $h$ tender para 0, vê-se que $f_y(x, y)$ é a *taxa (instantânea) de variação da temperatura quando o ponto* $(x, y)$ *se move em direção vertical.*

Como outra aplicação, suponhamos que $D$ represente a superfície de um lago e que $f(x, y)$ seja a profundidade da água sob o ponto $(x, y)$ da superfície. Neste caso, $f_x(x, y)$ é a taxa à qual a profundidade varia quando o ponto se afasta de $(x, y)$ paralelamente ao eixo-$x$. Analogamente, $f_y(x, y)$ é a taxa de variação da profundidade na direção do eixo-$y$.

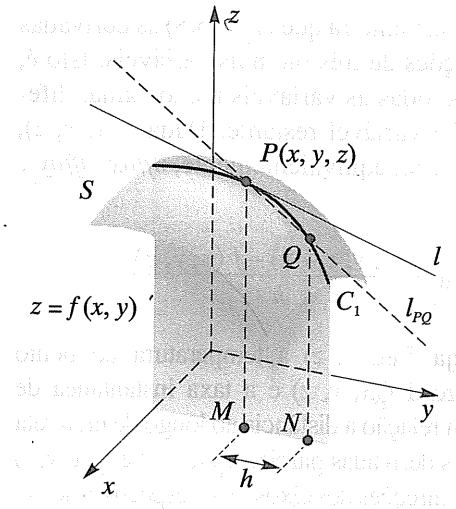



Figura 16.30

Utilizaremos a seguir o gráfico $S$ de $f$ para obter uma interpretação geométrica da Definição (16.8). Para ilustrar $f_y(x, y)$, consideremos os pontos $M(x, y, 0)$ e $N(x, y + h, 0)$. O plano paralelo ao plano-$yz$ e que passa por $M$ e $N$ intercepta $S$ segundo uma curva $C_1$ (ver Figura 16.30). Sejam $P$ e $Q$ os pontos de $C_1$ que têm projeções $M$ e $N$ no plano-$xy$.

Introduzindo um sistema retangular de coordenadas no plano que contém $M$, $N$, $P$ e $Q$, o coeficiente angular $m_{PQ}$ da secante $l_{PQ}$ por $P$ e $Q$ é

$$m_{PQ} = \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

O limite de $m_{PQ}$ quando $h$ tende para 0 – isto é, a derivada parcial $f_y(x, y)$ – é o coeficiente angular da tangente $l$ a $C_1$ em $P$.

Analogamente, se $C_2$ é o traço de $S$ no plano paralelo ao plano-$xz$ que passa por $M$, então $f_x(x, y)$ é o coeficiente angular da tangente a $C_2$ em $P$.

O teorema seguinte resume o assunto.

**Teorema (16.10)**

Sejam $S$ o gráfico de $z = f(x, y)$ e $P(a, b, f(a, b))$ um ponto de $S$ onde $f_x$ e $f_y$ existem. Sejam $C_1$ e $C_2$ os traços de $S$ nos planos $x = a$ e $y = b$, respectivamente, e sejam $l_1$ e $l_2$ as tangentes a $C_1$ e $C_2$ em $P$ (ver Figura 16.31).

**(i)** O coeficiente angular de $l_1$ no plano-$x = a$ é $f_y(a, b)$.

**(ii)** O coeficiente angular de $l_2$ no plano-$y = b$ é $f_x(a, b)$.

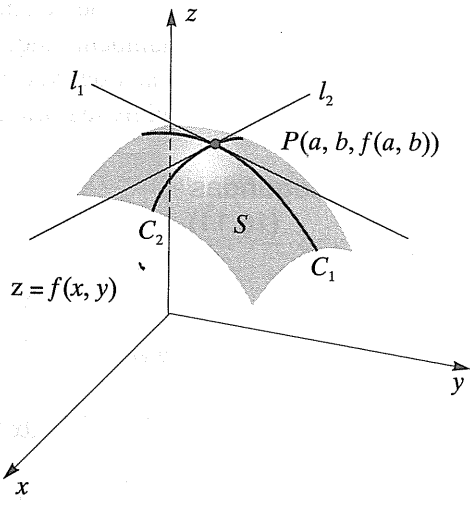



Figura 16.31

Definem-se da mesma maneira que em (16.8) as derivadas parciais primeiras de funções de três ou mais variáveis. Isto é, consideram-se constantes todas as variáveis menos uma, diferenciando-se em relação à variável restante. Dada $f(x, y, z)$, podemos calcular $f_x$, $f_y$ e $f_z$ (ou, equivalentemente, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial f/\partial z$). Por exemplo,

$$f_z(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}$$

Como aplicação, seja $f(x, y, z)$ a temperatura no ponto $P(x, y, z)$. A derivada parcial $f_z(x, y, z)$ é a taxa instantânea de variação da temperatura em relação à distância ao longo de uma reta por $P$ paralela ao eixo-$z$. As derivadas parciais $f_x(x, y, z)$ e $f_y(x, y, z)$ dão as taxas de variação nas direções dos eixos $x$ e $y$, respectivamente.

**EXEMPLO 3**

Se $w = x^2y^3 \operatorname{sen} z + e^{xz}$, ache $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial z$.

**SOLUÇÃO**

Procedamos como segue:

Considerando $y$ e $z$ constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3 \operatorname{sen} z + ze^{xz}$

Considerando $x$ e $z$ constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2 \operatorname{sen} z$

Considerando $x$ e $y$ constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial z} = x^2y^3 \cos z + xe^{xz}$

---

Se $f$ é uma função de duas variáveis $x$ e $y$, então $f_x$ e $f_y$ são também funções de duas variáveis; podemos, assim, considerar *suas* derivadas parciais primeiras, que são as **derivadas parciais segundas de $f$**, denotadas como segue.

**Derivadas parciais segundas (16.11)**

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y = (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y = (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Se $w = f(x, y)$, escrevemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\ \partial x} f(x, y) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial y\ \partial x} = w_{xy}$$

etc.

Note que $f_{xy}$ significa que diferenciamos primeiro em relação a $x$ e em seguida em relação a $y$, e $f_{yx}$ significa que diferenciamos primeiro em relação a $y$ e em seguida em relação a $x$. Com a notação "$\partial$" a ordem é contrária, isto é, $\partial^2 f/\partial x\ \partial y$ indica que diferenciamos primeiro em relação a $y$ e em seguida em relação a $x$.

Referimo-nos a $f_{xy}$ e a $f_{yx}$ como **derivadas parciais segundas mistas de $f$.** O próximo teorema afirma que, em condições convenientes, essas derivadas mistas (ou derivadas *cruzadas*) são iguais, isto é, a ordem de diferenciação é indiferente. A prova pode ser encontrada em textos de cálculo avançado.

**Teorema (16.12)** Seja f uma função de duas variáveis $x$ e $y$. Se $f, f_x, f_y, f_{xy}$ e $f_{yx}$ são contínuas em uma região aberta $R$, então $f_{xy} = f_{yx}$ em toda $R$.

A hipótese do Teorema (16.12) é satisfeita na maioria dos casos no cálculo e suas aplicações. Analogamente, se $w = f(x, y, z)$ e $f$ tem derivadas parciais primeiras e segundas contínuas, então valem as seguintes igualdades para as derivadas parciais mistas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\ \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\ \partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z\ \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\ \partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z\ \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y\ \partial z}$$

## EXEMPLO 4

Ache as derivadas parciais segundas de $f$ se

$$f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$$

## SOLUÇÃO

Esta função já foi considerada no Exemplo 1, em que obtivemos

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2x^3y - 2x^2$$

Logo, as derivadas parciais segundas são:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 - 4xy + 3) = 6xy^2 - 4y$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 - 4xy + 3) = 6x^2y - 4x$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3y - 2x^2) = 6x^2y - 4x$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3y - 2x^2) = 2x^3$$

Definem-se de modo análogo derivadas parciais terceiras ou de ordens mais elevadas. Por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{xx} = f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{xy} = f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y \, \partial x}$$

e assim por diante. Se as derivadas parciais primeiras, segundas e terceiras são contínuas, então a ordem de diferenciação não importa, ou seja,

$$f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy} \quad \text{e} \quad f_{yxy} = f_{xyy} = f_{yyx}$$

Obviamente, podem-se usar outras letras que são $x$ e $y$. Se $f$ é função de $r$ e $s$, então empregam-se para as derivadas parciais os símbolos

$$f_r(r, s), \quad f_s(r, s), \quad f_{rs}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

Notação e resultados análogos aplicam-se a derivadas parciais de funções de mais de duas variáveis.

## EXERCÍCIOS 16.3

**Exercs. 1-18:** Ache as derivadas parciais primeiras de $f$.

1 $f(x, y) = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$

2 $f(x, y) = (x^3 - y^2)^5$

3 $f(r, s) = \sqrt{r^2 + s^2}$

4 $f(s, t) = \frac{t}{s} - \frac{s}{t}$

5 $f(x, y) = xe^y + y \operatorname{sen} x$

6 $f(x, y) = e^x \ln xy$

7 $f(t, v) = \ln \sqrt{\frac{t + v}{t - v}}$

8 $f(u, w) = \operatorname{arctg} \frac{u}{w}$

9 $f(x, y) = x \cos \frac{x}{y}$

10 $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2} \sec x$

11 $f(x, y, z) = 3x^2z + xy^2$

12 $f(x, y, z) = x^2y^3z^4 + 2x - 5yz$

13 $f(r, s, t) = r^2e^{2s} \cos t$

14 $f(x, y, t) = \frac{x^2 - t^2}{1 + \operatorname{sen} 3y}$

**15** $f(x, y, z) = xe^t - ye^x + ze^{-y}$

**16** $f(r, s, v, p) = r^3 \operatorname{tg} s + \sqrt{s}e^{(v^2)} - v \cos 2p$

**17** $f(q, v, w) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{qv} + \operatorname{sen} vw$

**18** $f(x, y, z) = xyze^{xyz}$

**Exercs. 19-24:** Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$.

**19** $w = xy^4 - 2x^2y^3 + 4x^2 - 3y$

**20** $\dfrac{x^2}{x + y}$

**21** $w = x^3e^{-2y} + y^{-2}\cos x$

**22** $w = y^2e^{(x^2)} + \dfrac{1}{x^2y^3}$

**23** $w = x^2 \cosh \dfrac{z}{y}$

**24** $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**25** Se $w = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz$, ache $w_{xyz}$.

**26** Se $w = u^4vt^2 - 3uv^2t^3$, ache $w_{tut}$.

**27** Se $u = v \sec rt$, ache $u_{rvr}$.

**28** Se $v = y \ln (x^2 + z^4)$, ache $v_{zzy}$.

**29** Se $w = \operatorname{sen} xyz$, ache $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x}$.

**30** Se $w = \dfrac{x^2}{y^2 + z^2}$, ache $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y^2}$.

**31** Se $w = r^4s^3t - 3s^2e^{rt}$, verifique que $w_{rrs} = w_{rsr} = w_{srr}$.

**32** Se $w = \operatorname{tg} uv + 2 \ln (u + v)$, verifique que $w_{uvv} = w_{vuv} = w_{vvu}$.

**Exercs. 33-36:** Uma função $f$ de $x$ e $y$ é *harmônica* se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

em todo o domínio de $f$. Prove que a função dada é harmônica.

**33** $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

**34** $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

**35** $f(x, y) = \cos x \operatorname{senh} y + \operatorname{sen} x \cosh y$

**36** $f(x, y) = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$

**37** Se $w = \cos (x - y) + \ln (x + y)$, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

**38** Se $w = (y - 2x)^3 - \sqrt{y - 2x}$, mostre que $w_{xx} - 4w_{yy} = 0$.

**39** Se $w = e^{-c^2t} \operatorname{sen} cx$, mostre que $w_{xx} = w_t$ para todo número real $c$.

**40** A lei dos gases ideais pode ser enunciada como $PV = knT$, em que $n$ é o número de moléculas do gás, $V$ é o volume, $T$ é a temperatura, $P$ é a pressão e $k$ é uma constante. Mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

**Exercs. 41-42:** Mostre que $v$ satisfaz a *equação da onda*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

**41** $v = (\operatorname{sen} akt)(\operatorname{sen} kx)$

**42** $v = (x - at)^4 + \cos (x + at)$

**Exercs. 43-46:** Mostre que as funções $u$ e $v$ verificam *as equações de Cauchy-Riemann* $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$.

**43** $u(x, y) = x^2 - y^2$; $v(x, y) = 2xy$

**44** $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$; $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

**45** $u(x, y) = e^x \cos y$; $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

**46** $u(x, y) = \cos x \cosh y + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$;

$v(x, y) = \cos x \cosh y - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

**47** Escreva todas as derivadas parciais segundas possíveis de $w = f(x, y, z)$.

**48** Se $w = f(x, y, z, t, v)$, defina $w_t$ como um limite.

**49** Uma chapa de metal plana jaz em um plano-$xy$, de modo que a temperatura $T$ em $(x, y)$ seja dada por $T = 10(x^2 + y^2)^2$, em que $T$ é expresso em graus e $x$ e $y$ em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de $T$ em relação à distância em $(1, 2)$ na direção do

(a) eixo-$x$ (b) eixo-$y$

**50** A superfície de um lago é representada por uma região $D$ em um plano-$xy$, de modo que a profundidade sob o ponto correspondente a $(x, y)$ é dada por $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$, em que $x$, $y$ e $f(x, y)$ são expressos em metros. Se um esquiador aquático está na água no ponto $(4, 9)$, ache a taxa instantânea à qual a profundidade varia na direção do

(a) eixo-$x$ (b) eixo-$y$

**51** Suponhamos que o potencial elétrico $V$ no ponto $(x, y, z)$ seja dado por $V = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$, onde $V$ é dado em volts e $x$, $y$, $z$ em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de $V$ em relação à distância em $(2, -1, 1)$ na direção do (a) eixo-$x$, (b) eixo-$y$, (c) eixo-$z$.

**52** Um objeto está situado em um sistema coordenado retangular tal que a temperatura $T$ no ponto $P(x, y, z)$ seja dada por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$, em que $T$ é expressa em graus e $x$, $y$, $z$ em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de $T$ em relação à distância no ponto $P(4, -2, 1)$ na direção do

(a) eixo-$x$ (b) eixo-$y$ (c) eixo-$z$

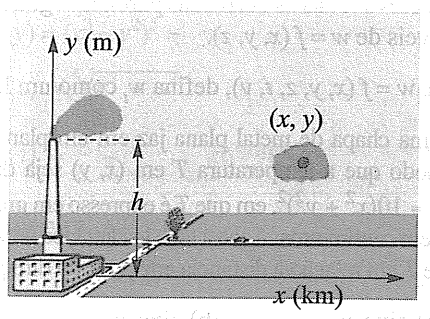
**53** Quando um poluente tal como óxido nítrico é emitido por uma chaminé de $h$ metros de altura, a concentração $C(x, y)$ (em $\mu g/m^3$) do poluente em um ponto a $x$ quilômetros da chaminé e à altura de $y$ metros (ver figura) pode ser representada por

$$C(x, y) = \frac{a}{x^2}\left[e^{-b(y-h)^2/x^2} + e^{-b(y+h)^2/x^2}\right]$$

em que $a$ e $b$ são constantes positivas que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente. Suponha que

$$C(x, y) = \frac{200}{x^2}\left[e^{-0{,}02(y-10)^2/x^2} + e^{-0{,}02(y+10)^2/x^2}\right]$$

Calcule e interprete $\partial C/\partial x$ e $\partial C/\partial y$ no ponto $(2, 5)$.




**54** A análise de certos circuitos elétricos envolve a fórmula $I = V/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$, em que $I$ é a corrente, $V$ a voltagem, $R$ a resistência, $L$ a indutância e $\omega$ uma constante positiva. Ache e interprete $\partial I/\partial R$ e $\partial I/\partial L$.

**55** A maioria dos computadores tem apenas um processador que pode ser utilizado para cálculos. Os supercomputadores modernos, entretanto, têm entre dois e vários milhares de processadores. Um supercomputador multiprocessador é comparado a um computador uniprocessador em termos de *speedup*. A *speedup* $S$ é o número de vezes mais rápido que um cálculo pode ser feito com um multiprocessador, do que com um uniprocessador. A *lei de Amdahl* é uma fórmula usada para determinar $S$

$$S(p, q) = \frac{p}{q + p(1 - q)}$$

em que $p$ é o número de processadores e $q$ é a fração do cálculo que pode ser realizada utilizando todos os processadores disponíveis em paralelo – isto é, usando-os de maneira que os dados sejam processados concomitantemente por unidades separadas. A situação ideal, *paralelismo completo*, ocorre quando $q = 1$.

(a) Se $q = 0{,}8$, ache a *speedup* quando $p = 10$, 100 e 1.000. Mostre que a *speedup* $S$ não pode exceder 5, independentemente do número de processadores disponíveis.

(b) Ache a taxa instantânea de variação de $S$ em relação a $q$.

(c) Qual a taxa de variação em (b) se há paralelismo completo, e como o número de processadores afeta esta taxa de variação?

**56** Ref. Exercício 55. A eficiência $E$ de um cálculo por multiprocessador pode ser calculada pela equação

$$E = \frac{S(p, q)}{p} = \frac{1}{q + p(1 - q)}$$

Mostre que, se $0 \le q < 1$, $E$ é uma função decrescente de $p$ e, portanto, sem paralelismo completo, o aumento do número de processadores não aumenta a eficiência do cálculo.

**57** No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura $T$ no instante $t$ horas e à profundidade $x$ pode ser dada aproximadamente por

$$T = T_0 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x),$$

em que $T_0$, $\omega$ e $\lambda$ são constantes. O período de sen $(\omega t - \lambda x)$ é 24 horas.

(a) Calcule e interprete $\partial T/\partial t$ e $\partial T/\partial x$.

(b) Mostre que $T$ verifica a equação unidimensional do calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

em que $k$ é uma constante.

**58** Mostre que qualquer função dada por

$$w = (\operatorname{sen} ax)(\cos by)\, e^{-\sqrt{a^2+b^2}\, z}$$

satisfaz a equação de Laplace em três dimensões

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

**59** A capacidade vital $V$ dos pulmões é o maior volume de ar que pode ser exalado após uma inalação de ar. Para um indivíduo do sexo masculino $x$ anos de idade e $y$ centímetros de altura, $V$ pode ser aproximada pela fórmula $V = 27{,}63y - 0{,}112xy$. Calcule e interprete (a) $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ (b) $\dfrac{\partial V}{\partial y}$.

**60** Em um dia claro, a intensidade de luz solar (em velas-pé) às $t$ horas após o nascente e à profundidade oceânica de $x$ metros, pode ser aproximada por

$$I(x, t) = I_0 e^{-kx} \operatorname{sen}^3(\pi t/D)$$

em que $I_0$ é a intensidade ao meio-dia, $D$ é a extensão do dia (em horas) e $k$ é uma constante positiva. Se $I_0 = 1.000$, $D = 12$ e $k = 0{,}10$, calcule e interprete $\partial I/\partial t$ e $\partial I/\partial x$ quando $t = 6$ e $x = 5$.

**61** Em economia, a *elasticidade de preço de procura* de um artigo indica a reação dos consumidores a uma alteração no preço de mercado do artigo. Suponhamos que $n$ artigos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tenham preços $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente, e que a demanda por $C_k$ seja uma função $q_k$ de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. A elasticidade de preço de $C_k$ é a função $e_k$ definida por

$$e_k = \frac{p_k}{q_k}\frac{\partial q_k}{\partial p_k}$$

Se, para cada $k$,

$$q_k = b_k p_1^{-a_{k1}} p_2^{-a_{k2}} \cdots p_n^{-a_{kn}}$$

em que $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$ e $b_k$ são constantes não negativas, mostre que $e_k$ é uma função constante.

**62** Ref. Exercício 61. Diz-se que o artigo $C_k$ é *independente* do artigo $C_j$ se uma variação no preço $p_k$ não afeta a demanda $q_j$. Isto equivale à condição $\partial q_j/\partial p_k = 0$. Se $q_k$ tem a forma do Exercício 61, mostre que $C_k$ é independente de $C_j$ se e somente se $a_{jk} = 0$.

**Exercs. 63-64:** Use o Teorema (16.10).

**63** Seja $C$ o traço do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ no plano $x = 1$. Escreva as equações paramétricas da tangente $l$ a $C$ no ponto $P(1, 2, 4)$. Esboce o parabolóide, $C$ e $l$.

**64** Seja $C$ o traço do gráfico de $z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ no plano $y = 2$. Escreva as equações paramétricas da tangente $l$ a $C$ no ponto $P(1, 2, \sqrt{11})$. Esboce a superfície, $C$ e $l$.

**Exercs. 65-66:** Use as seguintes fórmulas com $h = 0{,}01$ para aproximar $f_x(0{,}5, 0{,}2)$ e $f_y(0{,}5, 0{,}2)$, e compare os resultados com os valores obtidos de $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x-2h, y) - 4f(x-h, y) + 3f(x, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y-2h) - 4f(x, y-h) + 3f(x, y)}{2h}$$

**65** $f(x, y) = y^2 \operatorname{sen}(xy)$

**66** $f(x, y) = xy^3 + 4x^3y^2$

**Exercs. 67-68:** Use as seguintes fórmulas com $h = 0{,}01$ para aproximar $f_{xx}(0{,}6, 0{,}8)$ e $f_{yy}(0{,}6, 0{,}8)$.

$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) \approx \frac{f(x, y+h) - 2f(x, y) + f(x, y-h)}{h^2}$$

**67** $f(x, y) = \sec^2[\operatorname{tg}(xy^2)] \operatorname{sen}(xy)$

**68** $f(x, y) = \dfrac{x^3 + xy^2}{\operatorname{tg}(xy) + 4x^2y^3}$

## 16.4 INCREMENTOS E DIFERENCIAIS

Se $f$ é uma função de duas variáveis $x$ e $y$, então os símbolos $\Delta x$ e $\Delta y$ denotam incrementos de $x$ e $y$. Note que $\Delta y$ é um incremento da variável *independente* $y$ e não é o mesmo que o definido em (3.26) para uma variável *dependente* $y$. Em termos desta notação, a Definição (16.8) pode ser escrita

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Define-se como segue o incremento da variável *dependente* $w = f(x, y)$.

**Definição (16.13)**

Seja $w = f(x, y)$, e sejam $\Delta x$ e $\Delta y$ incrementos de $x$ e $y$, respectivamente. O **incremento $\Delta w$ de $w = f(x, y)$** é

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

*O incremento $\Delta w$ representa a variação no valor funcional se $(x, y)$ varia para $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.* Considerando $f(x, y)$ como a temperatura no ponto $(x, y)$ em uma chapa de metal, conforme Figura 16.32, então $\Delta w$ é a variação final na temperatura ao passar de $(x, y)$ para $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

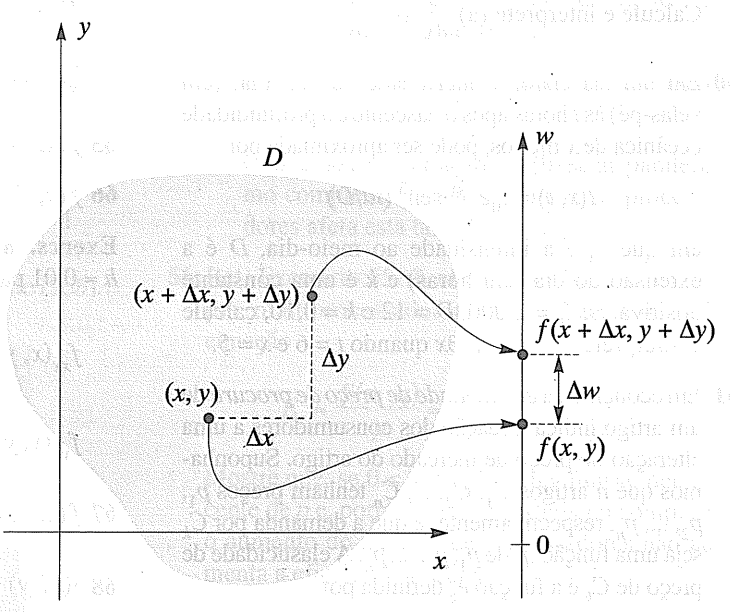



**Figura 16.32**

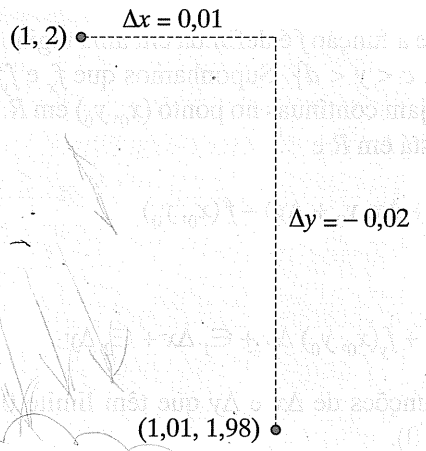



**Figura 16.33**

## EXEMPLO 1

Seja $w = f(x, y) = 3x^2 - xy$.

**(a)** Se $\Delta x$ e $\Delta y$ são incrementos de $x$ e $y$ determine $\Delta w$.

**(b)** Use $\Delta w$ para calcular a variação de $f(x, y)$ quando $(x, y)$ varia de (1, 2) para (1,01; 1,98).

## SOLUÇÃO

**(a)** Aplicando a Definição (16.13), temos

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\\ &= [3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] - (3x^2 - xy)\\ &= [3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 -\\ &\quad (xy + x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y)] - 3x^2 + xy\\ &= 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\,\Delta y - y\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y\end{aligned}$$

**(b)** Se $(x, y)$ varia de (1, 2) para (1,01, 1,98), temos a situação da Figura 16.33. Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}01$ e $\Delta y = -0{,}02$ na fórmula de $\Delta w$, temos

$$\begin{aligned}\Delta w &= 6(1)(0{,}01) + 3(0{,}01)^2 - (1)(-0{,}02) -\\ &\quad 2(0{,}01) - (0{,}01)(-0{,}02)\\ &= 0{,}0605\end{aligned}$$

Pode-se também achar este número calculando $f(1{,}01; 1{,}98) - f(1, 2)$.

---

A fórmula de $\Delta w$ na Definição (16.13) é usada apenas para calcular diferenças de valores funcionais entre dois pontos. Não é adequada para estabelecer outros resultados sobre a variação de $f(x, y)$. O teorema seguinte dá uma fórmula mais útil para aplicações. Para simplificar, usaremos as abreviações $\in_1$ e $\in_2$ para certas funções de $\Delta x$ e $\Delta y$, assim como para seus *valores* $\in_1(\Delta x, \Delta y)$ e $\in_2(\Delta x, \Delta y)$ em $(\Delta x, \Delta y)$.

**Teorema (16.14)**

Seja $w = f(x, y)$, em que a função $f$ é definida em uma região $R = \{(x, y);\ a < x < b,\ c < y < d\}$. Suponhamos que $f_x$ e $f_y$ existam em toda $R$ e sejam contínuas no ponto $(x_0, y_0)$ em $R$. Se $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está em $R$ e

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

então

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

em que $\in_1$ e $\in_2$ são funções de $\Delta x$ e $\Delta y$ que têm limite 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

## DEMONSTRAÇÃO

A Figura 16.34 ilustra o gráfico de $R$ e os pontos que desejamos considerar.

Escrevamos o incremento $\Delta w$ subtraindo e somando $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ como a seguir:

$$\text{(1)}\quad \Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$$

$$+ [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

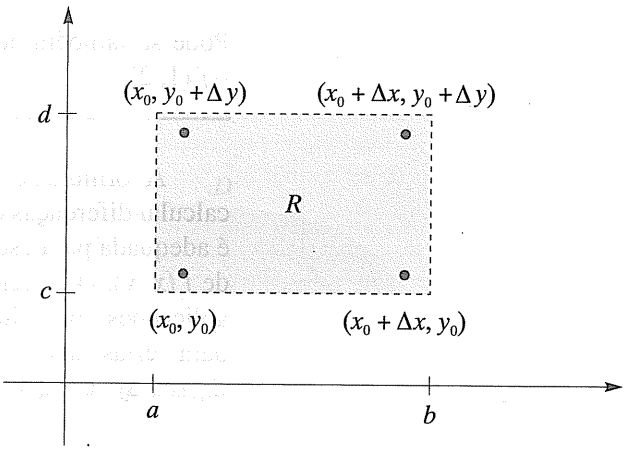



**Figura 16.34**

Consideremos em seguida $\Delta y$ como constante e definamos uma função $g$ de *uma* variável $x$ fazendo

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y),\ a < x < b$$

Segue-se que $g'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y)$ para $a < x < b$. Aplicando o teorema do valor médio (4.12) a $g$ no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$, obtemos

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(u)\,\Delta x$$

em que $u$ está entre $x_0$ e $x_0 + \Delta x$. Como $g(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$ e $g'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y)$, a última equação pode ser escrita

**(2)** $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f_x(u, y_0 + \Delta y)\,\Delta x.$

Analogamente, fazendo $h(y) = f(x_0, y)$ para $c < y < d$, então $h'(y) = f_y(x_0, y)$. Aplicando o teorema do valor médio à função $h$ no intervalo $[y_0, y_0 + \Delta y]$, obtemos

$$h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(v)\,\Delta y,$$

em que $v$ está entre $y_0$ e $y_0 + \Delta y$, ou, equivalentemente,

**(3)** $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, v)\,\Delta y$

Levando (2) e (3) na expressão de $\Delta w$ em (1), obtemos

**(4)** $\Delta w = f_x(u, y_0 + \Delta y)\,\Delta x + f_y(x_0, v)\,\Delta y$

A Figura 16.35 exibe pontos típicos correspondentes a $(u, y_0 + \Delta y)$ e $(x_0, v)$.

Definamos $\in_1$ e $\in_2$ como a seguir:

$$\in_1 = f_x(u, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)$$

$$\in_2 = f_y(x_0, v) - f_y(x_0, y_0)$$

Como $f_x$ e $f_y$ são contínuas, e notando, pela Figura 16.35, que $u \to x_0$ quando $\Delta x \to 0$ e $v \to y_0$ quando $\Delta y \to 0$, pode-se mostrar que $\in_1$ e $\in_2$ têm limite 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Escrevendo as equações precedentes para $\in_1$ e $\in_2$ na forma

$$f_x(u, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \in_1$$
$$f_y(x_0, v) = f_y(x_0, y_0) + \in_2$$

e levando em (4), a expressão de $\Delta w$, vemos que

$$\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + \in_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \in_2]\,\Delta y,$$

o que conduz à conclusão do teorema.

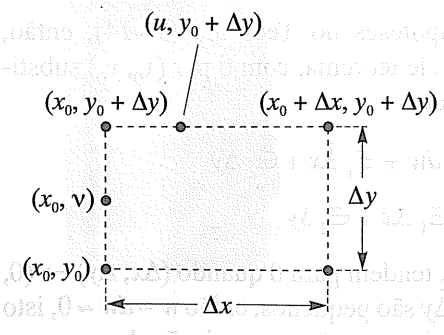



**Figura 16.35**

## EXEMPLO 2

Se $w = 3x^2 - xy$, ache expressões para $\in_1$ e $\in_2$ que satisfaçam a conclusão do Teorema (16.14) com $(x_0, y_0) = (x, y)$.

**SOLUÇÃO**

Da solução do Exemplo 1,

$$\Delta w = 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\,\Delta y - y\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y,$$

ou, equivalentemente,

$$\Delta w = (6x - y)\,\Delta x + (-x)\,\Delta y + (3\,\Delta x)(\Delta x) + (-\Delta x)\,\Delta y$$

o que está na forma dada no Teorema (16.14) com

$$f_x(x, y) = 6x - y, f_y(x, y) = -x, \in_1 = 3\,\Delta x, \in_2 = -\Delta x$$

Note que $\in_1$ e $\in_2$ não são únicos, pois podemos também escrever

$$\Delta w = (6x - y)\,\Delta x + (-x)\,\Delta y + (3\,\Delta x - \Delta y)\,\Delta x + (0)\,\Delta y$$

em que $\in_1 = 3\,\Delta x - y$ e $\in_2 = 0$.

---

No Capítulo 3 definimos diferenciais de funções de uma variável. Lembremos, de (3.27), que se $u = f(x)$ e $\Delta x$ é um incremento de $x$, então $dx = \Delta x$ e $du = f'(x)\,dx$. A próxima definição estende este conceito a funções de duas variáveis.

**Definição (16.15)**

Seja $w = f(x, y)$, e sejam $\Delta x$ e $\Delta y$ incrementos de $x$ e $y$, respectivamente.

**(i)** As **diferenciais** ***dx*** e ***dy*** das variáveis independentes $x$ e $y$ são

$$dx = \Delta x \quad \text{e} \quad dy = \Delta y$$

**(ii)** A **diferencial** ***dw*** da variável dependente $w$ é

$$dw = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy$$

Se $f$ satisfaz as hipóteses do Teorema (16.14), então, usando a conclusão daquele teorema, com o par $(x_0, y_0)$ substituído por $(x, y)$, vemos que

$$\Delta w = dw + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

Logo, $$\Delta w - dw = \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

em que tanto $\in_1$ como $\in_2$ tendem para 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Segue-se que se $\Delta x$ e $\Delta y$ são pequenos, então $w - dw \approx 0$, isto é, $dw \approx \Delta w$. Isto nos permite aproximar a variação de $w$ correspondente a pequenas variações $x$ e $y$.

## EXEMPLO 3

Se $w = 3x^2 - xy$, calcule $dw$ e aplique-o para aproximar a variação de $w$ se $(x, y)$ varia de (1,2) para (1,01; 1,98). Compare o resultado com a variação exata de $w$.

## SOLUÇÃO

Esta função é a mesma considerada nos Exemplos 1 e 2. Aplicando a Definição (16.15), temos

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy$$

$$= (6x - y)\,dx + (-x)\,dy$$

Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}01$ e $dy = \Delta y = -0{,}02$, obtemos

$$dw = (6 - 2)(0{,}01) + (-1)(-0{,}02) = 0{,}06$$

No Exemplo 1 vimos que $\Delta w = 0{,}0605$. Logo, o erro decorrente da utilização de $dw$ é 0,0005.

## EXEMPLO 4

O raio e a altura de um cilindro reto são 8 cm e 20 cm, respectivamente, com erro possível de medida de ± 0,01 cm. Use diferenciais para aproximar o erro máximo no cálculo do volume do cilindro.

## SOLUÇÃO

O método é análogo ao empregado para funções de uma variável. Assim, começamos com a fórmula geral $V = \pi r^2 h$ para o volume $V$ de um cilindro de raio de base $r$ e altura $h$. Encaramos $r$ e $h$ como valores medidos, com erros máximos de medida $dr$ e $dh$, respectivamente. A Figura 16.36 ilustra o caso em que tanto $dr$ como $dh$ são positivos. Naturalmente, o erro em uma das medidas, ou em ambas, pode ser negativo. O erro no volume calculado é a variação de $V$ correspondente a $dr$ e $dh$. Utilizando diferenciais, temos, de acordo com observações prévias e a Definição (16.15)(ii),

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh$$

Finalmente, atribuamos valores específicos às variáveis. Fazendo $r = 8$, $h = 20$ e $dr = dh = \pm 0{,}01$, obtemos a aproximação seguinte para o erro máximo:

$$dV = 2\pi(8)(20)(0{,}01) + (64)(0{,}01)\pi =$$
$$= \pi\,[3{,}2 + 0{,}64] = 3{,}84\pi = 12{,}06\ \text{cm}^3$$

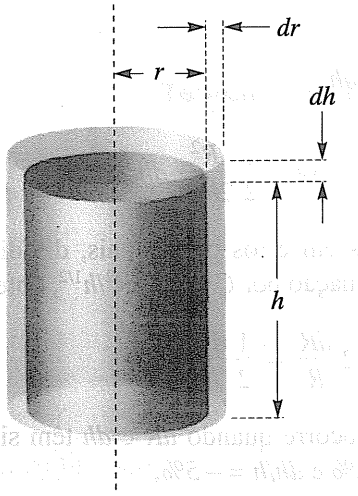



**Figura 16.36**

Recordemos, da Definição (3.32), que, se uma mensuração $w$ tem um erro (aproximado por) $dw$, então o *erro médio* é aproximadamente $dw/w$. O *erro percentual* é o erro médio multiplicado por 100%. No próximo exemplo vamos estimar o erro percentual ocasionado por erros em duas mensurações relacionadas.

**EXEMPLO 5**

Um balão meteorológico é liberado ao nível do mar, a uma distância $R$ do olho de um furacão, e sua altitude aumenta à medida que ele se move em direção ao olho. A altitude $h$ que o balão atingirá no olho pode ser aproximada por

$$h = \pi^2 g \frac{R^4}{C^2}$$

em que $g$ é uma constante gravitacional e $C$ é uma medida meteorológica chamada *circulação* da velocidade do vento. (A circulação está estreitamente relacionada com a intensidade e a direção dos ventos no interior do furacão). Se os erros percentuais máximos nas mensurações de $R$ e $h$ são ± 2% e ± 5%, respectivamente, estime o erro percentual máximo no cálculo de $C$.

**SOLUÇÃO**

Resolvendo a fórmula dada em relação a $C$, obtemos

$$C = \pi g^{1/2} \frac{R^2}{h^{1/2}}$$

Se os erros nas medidas de $R$ e $h$ são $dR$ e $dh$, então o erro em $C$ pode ser aproximado por

$$dC = \frac{\partial C}{\partial R} dR + \frac{\partial C}{\partial h} dh$$

$$= \pi g^{1/2} \frac{2R}{h^{1/2}} dR - \pi g^{1/2} \frac{1}{2} \frac{R^2}{2h^{3/2}} dh$$

Como estamos interessados em erros percentuais, dividimos ambos os membros desta equação por $C = \pi g^{1/2} R^2/h^{1/2}$, obtendo

$$\frac{dC}{C} = 2\frac{dR}{R} - \frac{1}{2}\frac{dh}{h}$$

O erro percentual máximo ocorre quando $dR$ e $dh$ têm sinais opostos. Assim, se $dR/R = 2\%$ e $dh/h = -5\%$,

$$\frac{dC}{C} = 2(2\%) - \frac{1}{2}(-5\%) = 6{,}5\%$$

Se $dR/R = -2\%$ e $dh/h = 5\%$,

$$\frac{dC}{C} = 2(-2\%) - \frac{1}{2}(5\%) = -6{,}5\%$$

Para uma função de uma variável, o termo *diferenciável* significa que a derivada existe. Para funções de duas variáveis, levamos em conta a condição indicada na próxima definição, que se baseia na fórmula $\Delta w$ no Teorema (16.14).

**Definição (16.16)**

Seja $w = f(x, y)$. A função $f$ é **diferenciável** em $(x_0, y_0)$ se $\Delta$ puder ser colocado na forma

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

em que $\in_1$ e $\in_2$ são funções de $\Delta x$ e $\Delta y$ que têm limite 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Diz-se que uma função $f$ de duas variáveis é **diferenciável em uma região** $R$ se é diferenciável em todo ponto de $R$. O próximo teorema decorre diretamente do Teorema (16.14) e da Definição (16.16). O termo *região retangular* significa uma região do tipo descrito em (16.14).

**Teorema (16.17)**

Se $w = f(x, y)$ e se $f_x$ e $f_y$ são contínuas em uma região retangular $R$, então $f$ é diferenciável em $R$.

O resultado seguinte mostra que uma função diferenciável é contínua e constitui uma das razões para utilizar a Definição (16.16) como definição de diferenciabilidade.

**Teorema (16.18)**

Se uma função $f$ de duas variáveis é diferenciável em $(x_0, y_0)$, então $f$ é contínua em $(x_0, y_0)$.

## DEMONSTRAÇÃO

Consideremos os incrementos $\Delta x$ e $\Delta y$. Podemos escrever $\Delta w$ de duas maneiras, de acordo com (16.13) e (16.16):

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + \in_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \in_2]\,\Delta y$$

Igualando estas expressões e fazendo $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, então

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0) + \in_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \in_2](y - y_0)$$

Segue-se que

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Logo, $f$ é contínua em $(x_0, y_0)$.

Se $f_x$ e $f_y$ são contínuas, então, pelo Teorema (16.7), $f$ é diferenciável. Isto nos dá o seguinte corolário do Teorema (16.18).

**Corolário (16.19)**

Se $f$ é uma função de duas variáveis e se $f_x$ e $f_y$ são contínuas em uma região retangular $R$, então $f$ é contínua em $R$.

Pode-se mostrar, por meio de exemplos, que a simples *existência* de $f_x$ e $f_y$ não é suficiente para assegurar a continuidade de $f$ (ver Exercício 41) contrariamente ao que se passa no caso de uma única variável, em que a existência de $f'$ implica a continuidade de $f$.

O estudo precedente pode ser estendido a funções de mais de duas variáveis. Suponhamos, por exemplo, que $w = f(x, y, z)$, em que $f$ é definida em uma região $R$ conveniente (tal como uma caixa retangular) e $f_x, f_y, f_z$ existam em $R$ e sejam contínuas em $(x, y, z)$. Se dermos a $x, y, z$ incrementos $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, respectivamente, então o incremento correspondente

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

pode escrever-se sob a forma

$$\Delta w = f_x(x, y, z)\,\Delta x + f_y(x, y, z)\,\Delta y + f_z(x, y, z)\,\Delta z + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y + \in_3 \Delta z,$$

em que $\in_1, \in_2$ e $\in_3$ são funções de $\Delta x$, $\Delta y$ e $\Delta z$ que têm limite 0 quando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$. Podem-se estabelecer resultados análogos a (16.17)-(16.19) para funções de três variáveis.

A definição seguinte constitui uma extensão de (16.15) a funções de três variáveis.

**Definição (16.20)**

Seja $w = f(x, y, z)$ e sejam $\Delta x$, $\Delta y$ e $\Delta z$ incrementos de $x$, $y$ e $z$, respectivamente.

**(i)** As **diferenciais** $dx$, $dy$ e $dz$ das variáveis independentes $x$, $y$ e $z$ são

$$dx = \Delta x,\ dy = \Delta y,\ dz = \Delta z$$

**(ii)** A **diferencial** $dw$ da variável dependente $w$ é

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

Pode-se usar $dw$ como aproximação de $\Delta w$ se os incrementos de $x$, $y$ e $z$ são pequenos. A diferenciabilidade se define como em (16.16). Faz-se de modo análogo a extensão ao caso de quatro ou mais variáveis.

## EXEMPLO 6

Suponhamos que as dimensões (em centímetros) de uma caixa retangular variem de 9, 6 e 4 para 9,02, 5,97 e 4,01, respectivamente.

**(a)** Obtenha, por meio de diferenciais, uma aproximação da variação do volume.

**(b)** Ache a variação exata do volume.

## SOLUÇÃO

**(a)** O método de resolução é análogo ao usado para o cilindro circular reto do Exemplo 4. Assim, começamos com a fórmula geral $V = xyz$ para o volume de uma caixa retangular de dimensões $x$, $y$ e $z$. Encaramos em seguida $dx$, $dy$ e $dz$ como erros nas medidas. O erro no volume calculado é então

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

$$= yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz$$

Finalmente, substituímos os valores dados $x = 9$, $y = 6$, $z = 4$, $dx = 0{,}02$, $dy = -0{,}03$ e $dz = 0{,}01$, obtendo

$$dV = 24(0{,}02) + 36(-0{,}03) + 54(0{,}01)$$

$$= 0{,}48 - 1{,}08 + 0{,}54 = -0{,}06$$

Assim, o volume diminui de aproximadamente 0,06 $cm^3$.

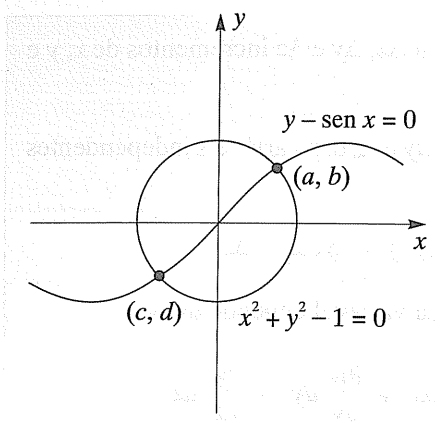



Figura 16.37

**(b)** a variação exata do volume é

$$\Delta V = (9{,}02)(5{,}97)(4{,}01) - (9)(6)(4) = -0{,}063906 \text{ cm}^3$$

Em textos de pré-cálculo estudam-se métodos de resolução de sistemas de equações lineares como

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = -5 \end{cases}$$

Nas aplicações costumam aparecer sistemas de equações não-lineares, como

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y - \text{sen } x = 0 \end{cases}$$

Como não podemos obter soluções exatas de um tal sistema por técnicas algébricas, é necessário estabelecermos métodos para *aproximar* soluções. Poderíamos grafar ambas as equações em um mesmo sistema de eixos, conforme Figura 16.37, e estimar os pontos de intersecção $(a, b)$ e $(c, d)$; entretanto, a maioria das aplicações exige maior precisão. Estudaremos a seguir um método baseado em diferenciais, que permite aproximar soluções com qualquer grau de precisão.

Consideremos um sistema geral de duas equações em $x$ e $y$:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

em que $f$ e $g$ são funções de duas variáveis. (No caso anterior, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $g(x, y) = y - \text{sen } x$.) Queremos obter uma aproximação do ponto de intersecção $(a, b)$ dos gráficos das duas equações (ver Figura 16.38). Comecemos com uma *primeira aproximação* $(x_1, y_1)$, na qual, conforme indicado na figura, há incrementos $\Delta x$ e $\Delta y$ tais que

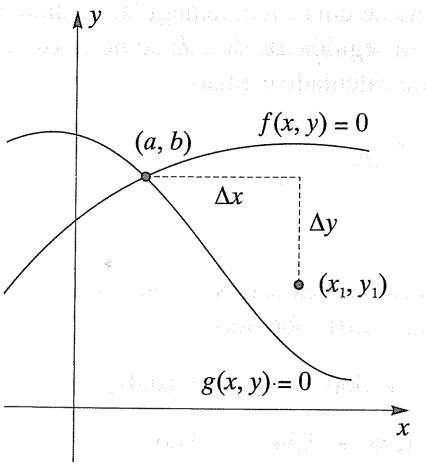



Figura 16.38

$$a = x_1 + \Delta x, \; b = y_1 + \Delta y$$

Sejam $\Delta f$ e $\Delta g$ os incrementos de $f$ e $g$ correspondentes à passagem de $(x_1, y_1)$ para $(a, b)$. Como $f(a, b) = 0$ e $g(a, b) = 0$, vemos que

$$\Delta f = f(a, b) - f(x_1, y_1) = -f(x_1, y_1)$$

$$\Delta g = g(a, b) - g(x_1, y_1) = -g(x_1, y_1)$$

Assim, se $df$ e $dg$ são as diferenciais de $f$ e $g$ calculadas em $(x_1, y_1)$, então

$$df \approx -f(x_1, y_1) \text{ e } dg \approx -g(x_1, y_1)$$

Utilizando a forma de *df* e *dg* da Definição (16.15)(ii), obtemos o seguinte sistema de *igualdades aproximadas* nas incógnitas $\Delta x$ e $\Delta y$:

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} f_x(x_1, y_1)\,\Delta x + f_y(x_1, y_1)\,\Delta y \approx -f(x_1, y_1) \\ g_x(x_1, y_1)\,\Delta x + g_y(x_1, y_1)\,\Delta y \approx -g(x_1, y_1) \end{cases}$$

Na prática, costuma-se escrever este sistema sob *forma matricial* como segue, em que todas as funções são calculadas em $(x_1, y_1)$:

$$\text{(2)} \quad \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -f \\ -g \end{bmatrix}$$

Resolvemos as igualdades aproximadas (1) em relação a $\Delta x$ e $\Delta y$ tratando $\approx$ como $=$, o que nos dá aproximações para $\Delta x$ e $\Delta y$. Embora $(x_2, y_2) = (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ não seja em geral a solução *exata* $(a, b)$, já é uma aproximação melhor do que $(x_1, y_1)$. O processo pode ser iterado utilizando-se a aproximação $(x_2, y_2)$ em lugar de $(x_1, y_1)$ em (1), para obter uma terceira aproximação $(x_3, y_3)$. Prosseguimos desta forma até que $|\Delta x| \leq \in$ e $|\Delta y| \leq \in$ para alguma tolerância positiva $\in > 0$. A convergência de $x_k$ e $y_k$ para $a$ e $b$, respectivamente, costuma ser rápida, e o número de algarismos corretos duplica aproximadamente a cada passo. Este método de aproximações sucessivas é conhecido como **método de Newton** para um sistema de duas equações com duas incógnitas. O método pode ser estendido a sistemas de $n$ equações com $n$ incógnitas, e é um dos métodos mais usados para obter aproximações de soluções de sistemas de equações não-lineares.

## EXEMPLO 7

Use o método de Newton para obter uma aproximação das soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y - \operatorname{sen} x = 0 \end{cases}$$

## SOLUÇÃO

A Figura 16.37 é o gráfico das duas equações. Tomaremos $(x_1, y_1) = (0{,}5;\ 0{,}5)$ como primeira aproximação para a solução correspondente ao ponto de intersecção no primeiro quadrante. Fazendo $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $g(x, y) = y - \operatorname{sen} x$, obtemos

$$f_x(x, y) = 2x,\ f_y(x, y) = 2y,\ g_x(x, y) = -\cos x,\ g_y(x, y) = 1$$

Fazemos agora $x_1 = 0{,}5$ e $y_1 = 0{,}5$ em (1) e resolvemos em relação aos valores (aproximados) $\Delta x$ e $\Delta y$. Tomamos então, como segunda aproximação,

$$(x_2, y_2) = (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$$

Com $(x_2, y_2)$ em lugar de $(x_1, y_1)$ em (1), obtemos valores (aproximados) de $\Delta x_1$ e $\Delta y_1$ e tomamos, como terceira aproximação,

$$(x_3, y_3) = (x_2 + \Delta x_1, y_2 + \Delta y_1)$$

O processo continua até atingirmos a precisão desejada. A tabela seguinte registra aproximações com oito casas decimais dos valores usados nas equações (1). Note que, se $k = 5$, temos $|\Delta x| \leq \in$ e $|\Delta y| \leq \in$ com $\in = 0{,}00000005$. Logo, a solução $(x_5, y_5)$ tem precisão de oito casas decimais.

| $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $f(x_k, y_k)$ | $g(x_k, y_k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 0,5 | − 0,5 | 0,02057446 |
| 2 | 0,77725783 | 0,72274217 | 0,12648598 | 0,02141484 |
| 3 | 0,74030063 | 0,67498279 | 0,00364679 | 0,00047290 |
| 4 | 0,73908622 | 0,67361333 | 0,00000335 | 0,00000050 |
| 5 | 0,73908513 | 0,67361203 | 0,00000000 | 0,00000000 |

| $f_x(x_k, y_k)$ | $f_y(x_k, y_k)$ | $g_x(x_k, y_k)$ | $g_y(x_k, y_k)$ | $\Delta x_k$ | $\Delta y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | − 0,87758256 | 1 | 0,27725783 | 0,22274217 |
| 1,55451565 | 1,44548435 | − 0,71283938 | 1 | − 0,03695719 | − 0,04775939 |
| 1,48060127 | 1,34996558 | − 0,73826581 | 1 | − 0,00121442 | − 0,00136946 |
| 1,47817243 | 1,34722665 | − 0,73908440 | 1 | − 0,00000108 | − 0,00000130 |
| 1,47817027 | 1,34722406 | − 0,73908513 | 1 | 0,00000000 | 0,00000000 |

Pela tabela,

$$(x_5, y_5) \approx (0{,}73908513;\ 0{,}67361203)$$

Por simetria, uma aproximação da solução correspondente ao ponto no terceiro quadrante na Figura 16.37 é $(-x_5, -y_5)$.

## EXERCÍCIOS 16.4

**Exercs. 1-2:** Se $\Delta x$ e $\Delta y$ são incrementos de $x$ e $y$, ache (a) $\Delta w$, (b) $dw$ e (c) $dw - \Delta w$.

**1** $w = 5y^2 - xy$ **2** $w = xy - y^2 + 3x$

**Exercs. 3-6:** Determine expressões de $\in_1$ e $\in_2$ que satisfaçam a Definição (16.16).

**3** $f(x, y) = 4y^2 - 3xy + 2x$

**4** $f(x, y) = (2x - y)^2$

**5** $f(x, y) = x^3 + y^3$

**6** $f(x, y) = 2x^2 - xy^2 + 3y$

**Exercs. 7-18:** Calcule $dw$.

**7** $w = x^3 - x^2y + 3y^2$ **8** $w = 5x^2 + 4y - 3xy^3$

**9** $w = x^2 \operatorname{sen} y + 2y^{3/2}$ **10** $w = ye^{-2x} - 3x^4$

**11** $w = x^2e^{xy} + (1/y^2)$

**12** $w = \ln(x^2 + y^2) + x \operatorname{arctg} y$

**13** $w = x^2 \ln(y^2 + z^2)$ **14** $w = x^2y^3z + e^{-2z}$

**15** $w = \dfrac{xyz}{x + y + z}$ **16** $w = x^2e^{yz} + y \ln z$

**17** $w = x^2z + 4yt^3 - xz^2t$ **18** $w = x^2y^3zt^{-1}v^4$

**Exercs. 19-22:** Por meio de diferenciais, aproxime a variação de $f$ para as variações indicadas nas variáveis independentes.

**19** $f(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$; $(-2, 3)$ para $(-2{,}02; 3{,}01)$

**20** $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y$; $(1, 2)$ para $(1{,}03; 1{,}99)$

**21** $f(x, y, z) = x^2z^3 - 3yz^2 + x^{-3} + 2y^{1/2}z$; $(1, 4, 2)$ para $(1{,}02; 3{,}97; 1{,}96)$

**22** $f(x, y, z) = xy + xz + yz$; $(-1, 2, 3)$ para $(-0{,}98; 1{,}99; 3{,}03)$

**23** As dimensões de uma caixa retangular fechada são 1 m, 2 m e 3 m, com erro possível de 0,16 cm em cada medida. Por meio de diferenciais, aproxime o erro máximo no valor calculado

(a) da área da superfície.

(b) do volume.

**24** Medem-se os dois lados menores de um triângulo retângulo, obtendo-se 3 cm e 4 cm, respectivamente, com erro possível de ± 0,02 cm em cada medida. Por meio de diferenciais, obtenha uma aproximação do erro máximo no valor calculado (a) da hipotenusa, (b) da área do triângulo.

**25** A *resistência à retirada* de um prego indica sua força de adesão à madeira. Uma fórmula empírica para os pregos comuns é $P = 2433{,}5\, S^{5/2}RD$, em que $P$ é a resistência à retirada máxima em kg, $S$ é a gravidade específica da madeira a 12% de umidade, $R$ é o raio do prego (em cm) e $D$ é a profundidade (em cm) da penetração do prego na madeira. Um prego *Cd* comum de 5 cm de comprimento e 0,28 cm de diâmetro é completamente introduzido em um pedaço de abeto Douglas, cuja gravidade específica é 0,54.

(a) Aproxime a resistência máxima à retirada. (Nas aplicações, apenas um sexto dessa resistência é considerado seguro, para longos períodos de tempo.)

(b) Quando os pregos são fabricados, $R$ e $D$ podem variar por ± 2%, e a gravidade específica de diferentes amostras de abeto Douglas pode variar por ± 3%. Obtenha uma aproximação do erro percentual máximo no valor calculado de $P$.

**26** A resistência total $R$ de três resistores $R_1$, $R_2$ e $R_3$, ligados em paralelo, é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as medidas de $R_1$, $R_2$ e $R_3$ são 100, 200 e 400 ohms, respectivamente, com erro máximo de ± 1% em cada medida, aproxime o erro máximo no valor calculado de $R$.

**27** A gravidade específica de um objeto mais denso que a água é dada por $s = A/(A - W)$, em que $A$ e $W$ são os pesos (em libras) do objeto no ar e na água, respectivamente. Se as medidas são $A = 12$ lb e $W = 5$ lb, com erros máximos de $\pm \frac{1}{2}$ oz no ar e ± 1 oz na água, qual é o erro máximo no valor calculado de $s$?

**28** A pressão $P$, o volume $V$ e a temperatura $T$ (em °K) estão relacionados pela lei dos gases ideais $PV = kT$, em que $k$ é uma constante. Se $P = 0{,}5$ lb/in.$^2$ quando $V = 64$ in.$^3$ e $T = 350$ °K, aproxime a variação de $P$ se $V$ e $T$ variam para 70 in.$^3$ e 345°$K$, respectivamente.

**29** Suponha que, ao aplicar a fórmula da gravidade específica $s = A/(A - W)$ (ver Exercício 27), sejam cometidos erros percentuais de ± 2% e ± 4% nas medidas de $A$ e $W$, respectivamente. Expresse o erro percentual máximo no valor calculado de $s$ como função de $A$ e $W$.

**30** Suponha que, ao aplicar a lei dos gases ideais $PV = kT$ (ver Exercício 28), sejam cometidos erros percentuais de ± 0,8% e ± 0,5% nas medidas de $T$ e $P$, respectivamente. Aproxime o erro percentual máximo no valor calculado de $V$.

**31** A resistência elétrica $R$ de um fio é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado do seu diâmetro. Se o comprimento é medido com um erro possível de ± 1% e o diâmetro é medido com um erro possível de ± 3%, qual o erro percentual máximo no valor calculado de $R$?

**32** O fluxo sangüíneo através de uma arteríola é dado por $F = \pi PR^4/(8vl)$, em que $l$ é o comprimento da arteríola, $R$ é o raio, $P$ é a diferença de pressão entre as duas extremidades, e $v$ é a viscosidade do sangue (ver Seção 6.8). Suponha que $v$ e $l$ sejam constantes. Por meio de diferenciais, aproxime a variação percentual no fluxo sangüíneo se o raio decresce de 2% e a pressão aumenta de 3%.

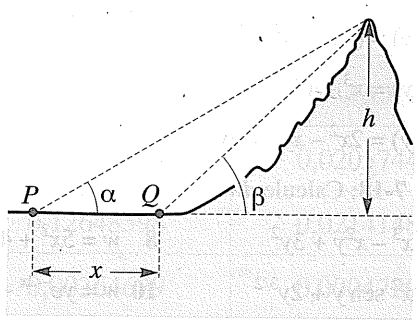
**33** A temperatura $T$ no ponto $P(x, y, z)$ em um sistema coordenado $xyz$ é dada por $T = 8(2x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}$. Por meio de diferenciais, aproxime a diferença de temperatura entre os pontos (6, 3, 2) e (6,1; 3,3; 1,98).

**34** Calcule a variação da área de um triângulo isósceles se cada um dos dois lados iguais aumenta de 100 para 101 e o ângulo entre eles diminui de 120° para 119°.

**35** Se o topo de uma montanha é visto de um ponto $P$ (ver figura), o ângulo de elevação é $\alpha$. De um ponto $Q$, $x$ unidades de distância mais próximo da montanha, o ângulo de elevação é $\beta$. Pela trigonometria, a altura $h$ da montanha é dada por

$$h = \frac{x}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

Um observador mede $\alpha$ e $\beta$ com uma precisão de 30'' (aprox. 0,000145 rd). Suponhamos $\alpha = 15°$, $\beta = 20°$ e $x = 600$ metros. Estime, por meio de diferenciais, a precisão da medida do comprimento, de modo que o erro máximo no valor calculado de $h$ não supere 3 metros.




**36** Se um remédio é ingerido por via oral, o tempo $T$ durante o qual a maior quantidade do remédio permanece na corrente sangüínea pode ser calculado com auxílio da meia-vida $x$ do remédio no estômago e a meia-vida $y$ do remédio na corrente sangüínea. Para muitos remédios comuns (como a penicilina), $T$ é dado por

$$T = \frac{xy(\ln x - \ln y)}{(x - y) \ln 2}$$

Para certo remédio, $x = 30$ min e $y = 1$ h. Se o erro máximo na estimativa de cada meia-vida é ± 10%, ache o erro máximo no valor calculado de $T$.

**37** Suponha que o cilindro descrito no Exemplo 4 tenha tampa e base fechadas. Por meio de diferenciais, aproxime o erro máximo no cálculo da área da superfície total.

**38** Por meio de diferenciais, aproxime a variação na área da superfície da caixa descrita no Exemplo 6. Qual a variação exata?

**Exercs. 39-40:** Prove que $f$ é diferenciável em todo seu domínio.

**39** $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

**40** $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$

**41** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{Se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{Se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Prove que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem. (*Sugestão:* Use a Definição (16.8).)

(b) Prove que $f$ não é contínua em (0, 0).

(c) Prove que $f$ não é diferenciável em (0, 0).

**42** Seja

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} & \text{Se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{Se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

(a) Prove que $f_x$, $f_y$ e $f_z$ existem em (0, 0, 0).

(b) Prove que $f$ não é diferenciável em (0, 0, 0).

**Exercs. 43-44:** Ref. Exemplo 7. Use o método de Newton para obter uma aproximação da solução do sistema de equações, com quatro casas decimais, utilizando a primeira aproximação dada.

**43** $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{10} + \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1 \quad (x_1, y_1) = (2, 1) \end{cases}$$

**44** $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y-1)^2}{3} = 1 \quad (x_1, y_1) = (-1{,}5; -1{,}5) \end{cases}$$

**45** Estabeleça o método de Newton para um sistema de três equações,

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

em que $f$, $g$ e $h$ são funções de três variáveis. Expresse a solução em forma matricial análoga a (2) da página 393.

## 16.5 REGRAS DA CADEIA

Se $f$ e $g$ são funções de *uma* variável tais que

$$w = f(u) \text{ e } u\ g(x)$$

então a função composta de $f$ e $g$ é dada por

$$w = f(g(x))$$

Aplicando a regra da cadeia (3.33), podemos achar a derivada de $w$ em relação a $x$ como segue:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dx}$$

Nesta seção aplicaremos esta fórmula a funções de diversas variáveis.

Sejam $f$, $g$ e $h$ funções de duas variáveis tais que

$$w = f(u, v), \text{ com } u = g(x, y),\ v = h(x, y)$$

Se, para cada par $(x, y)$ em um subconjunto $D$ de $\mathbb{R}^2$ o par correspondente $(u, v)$ estiver no domínio de $f$, então

$$w = f(g(x, y), h(x, y))$$

define $w$ como uma função (composta) de $x$ e $y$ com domínio $D$. Por exemplo, se

$$w = u^2 + u \operatorname{sen} v, \text{ com } u = xe^{2y},\ v = xy$$

então

$$w = x^2e^{4y} + xe^{2y} \operatorname{sen} xy$$

O próximo teorema estabelece fórmulas para expressar $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ em termos das derivadas parciais primeiras das funções $g$, $h$ e $f$. No enunciado do teorema supusemos os domínios escolhidos, de modo que a função composta seja definida em um domínio conveniente $D$. Cada uma das fórmulas enunciadas no Teorema (16.21) é chamada *regra da cadeia*.

**Regras da Cadeia (16.21)**

Se $w = f(u, v)$, com $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, e se $f$, $g$ e $h$ são diferenciáveis, então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

## DEMONSTRAÇÃO

Dando a $x$ um incremento $\Delta x$ e mantendo $y$ constante (isto é, $\Delta y = 0$), obtemos os seguintes incrementos de $u$ e $v$:

**(1)**
$$\Delta u = g(x + \Delta x, y) - g(x, y)$$
$$\Delta v = h(x + \Delta x, y) - h(x, y)$$

os quais, por seu turno, conduzem ao seguinte incremento de $w$:

$$\Delta w = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

Como $f$ é diferenciável, temos, pela Definição (16.16),

**(2)**
$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial w}{\partial v}\Delta v + \in_1 \Delta u + \in_2 \Delta v$$

em que $\in_1$ e $\in_2$ são funções de $\Delta u$ e $\Delta v$ que têm limite 0 quando $(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$. Além disso, podemos supor que tanto $\in_1$ como $\in_2$ sejam iguais a 0 se $(\Delta u, \Delta v) = (0, 0)$, porque, em caso contrário, podem ser substituídas por funções $\mu_1$ e $\mu_2$ que tenham esta propriedade e sejam iguais a $\in_1$ e $\in_2$ nos demais pontos. Em vista disto, as funções $\in_1$ e $\in_2$ em (2) são contínuas em (0, 0). Dividindo ambos os membros da equação (2) por $\Delta x$, temos

**(3)**
$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \in_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + \in_2 \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

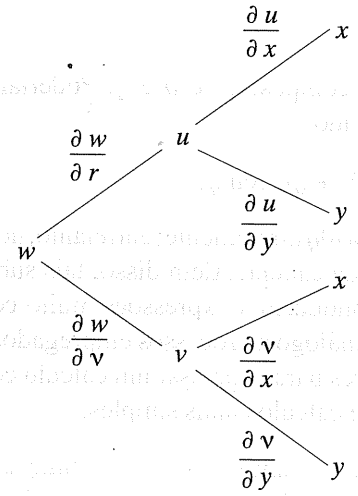



**Figura 16.39**

Encarando $w$ como função de $x$ e $y$, então

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Outrossim, das equações (1),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Se $\Delta x$ tende para 0, vemos, de (1), que $\Delta u$ e $\Delta v$ também tendem para 0 e, conseqüentemente, $\in_1$ e $\in_2$ também tendem para 0. Tomando, pois, o limite na equação (3) quando $\Delta x \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Estabelece-se de maneira análoga a segunda fórmula do enunciado do teorema.

O *diagrama em árvore* da Figura 16.39 é um dispositivo para rememorar as regras da cadeia (16.21). Traçamos primeiro *ramos* (segmentos) de $w$ a $u$ e $v$, para indicar que $w$ é função dessas duas variáveis. Como $u$ é função de $x$ e $y$, traçamos em seguida ramos de $u$ a $x$ e $y$ e, da mesma forma, ramos de $v$ a $x$ e $y$. No diagrama indicamos também as diversas derivadas parciais em jogo para as variáveis dadas.

Para achar $\partial w/\partial x$ por meio do diagrama, consideramos todos os pares de ramos (caminhos) que levam de $w$ a $x$. Há duas possibilidades:

$$w \xrightarrow{\frac{\partial w}{\partial u}} u \xrightarrow{\frac{\partial u}{\partial x}} x \qquad \text{e} \qquad w \xrightarrow{\frac{\partial w}{\partial v}} v \xrightarrow{\frac{\partial v}{\partial x}} x$$

Em seguida somamos os produtos dos pares correspondentes das derivadas parciais, obtendo

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Acha-se de maneira análoga a fórmula de $\partial w/\partial y$, utilizando os pares de ramos que levam de $w$ a $y$.

## EXEMPLO 1

Por meio de uma regra de cadeia, ache $\partial w/\partial p$ e $\partial w/\partial q$ se

$$w = r^3 + s^2, \text{ com } r = pq^2, s = p^2 \operatorname{sen} q$$

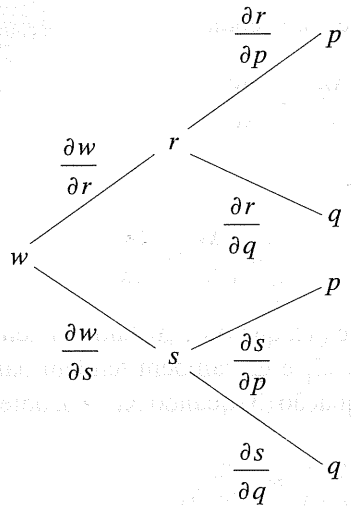



**Figura 16.40**

## SOLUÇÃO

Note que $w$ é uma função (composta) de $p$ e $q$. Poderíamos também substituir $r$ e $s$, obtendo

$$w = (pq^2)^3 + (p^2 \operatorname{sen} q)^2$$

e achar em seguida $\partial w/\partial p$ e $\partial w/\partial q$ diretamente; entretanto, nosso objetivo é ilustrar as regras da cadeia. Além disso, tais substituições, em alguns casos, conduzem a expressões muito complicadas. O processo aqui é análogo a processos empregados na programação de computadores para expressar um cálculo complexo como uma sucessão de cálculos mais simples.

Como $w$ é função de $r$ e $s$, e tanto $r$ como $s$ são funções de $p$ e $q$, começamos construindo o diagrama em árvore da Figura 16.40. Com base no diagrama, tomamos os produtos de todos os pares de derivadas parciais que levam de $w$ a $p$, obtendo

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p}$$

$$= (3r^2)(q^2) + (2s)(2p \operatorname{sen} q)$$

Fazemos agora a substituição

$$r = pq^2 \text{ e } s = p^2 \operatorname{sen} q:$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = 3(pq^2)^2(q^2) + (2p^2 \operatorname{sen} q)(2p \operatorname{sen} q)$$

$$= 3p^2q^6 + 4p^3 \operatorname{sen}^2 q$$

Para achar $\partial w/\partial q$, voltamos ao diagrama da Figura 16.40:

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial q}$$

$$= (3r^2)(2pq) + (2s)(p^2 \cos q)$$

Fazendo a substituição em relação a $r$ e $s$, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial q} = 3(pq^2)^2(2pq) + 2(p^2 \operatorname{sen} q)(p^2 \cos q)$$

$$= 6p^2q^5 + 2p^4 \operatorname{sen} q \cos q$$

---

Note que, após aplicar a regra da cadeia do Exemplo 1, substituímos $r$ e $s$, expressando, portanto, $\partial w/\partial p$ e $\partial w/\partial q$ em termos de $p$ e $q$. Com isto visamos enfatizar o fato de que $w$ é uma função (composta) das duas variáveis $p$ e $q$.

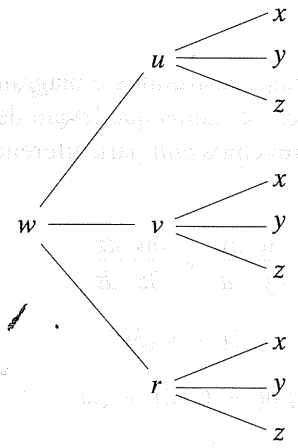



Figura 16.41

Podemos aplicar regras da cadeia a funções compostas de um número arbitrário de variáveis e construir diagramas em árvore para ajudar na formulação dessas regras. Daqui por diante, não mais escreveremos símbolos de derivadas parciais nos ramos. Fica entendido que, se um ramo leva de uma variável $w$ a outra variável $r$, como na Figura 16.40, a derivada parcial é $\partial w/\partial r$. Todavia, se $w$ é função de apenas *uma* variável $r$, então escrevemos $dw/dr$ em lugar de $\partial w/\partial r$.

A título de ilustração, seja $w$ função de $u$, $v$ e $r$, e $u$, $v$ e $r$ funções de $x$, $y$, $z$. Esta situação é indicada pelo diagrama da Figura 16.41. Se quisermos achar $\partial w/\partial y$, tomaremos os pares de produtos de derivadas parciais que levam de $w$ a $y$, e somaremos, obtendo

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

## EXEMPLO 2

Use uma regra da cadeia para achar $\partial w/\partial z$ se

$$w = r^2 + sv + t^3, \text{ com } r = x^2 + y^2 + z^2,\ s = xyz,\ v = xe^y,\ t = yz^2$$

## SOLUÇÃO

Note que $w$ é função de $r$, $s$, $v$ e $t$, e que cada uma dessas variáveis, por seu turno, é função de $x$, $y$ e $z$. A Figura 16.42 exibe o diagrama em árvore adequado. Como queremos achar $\partial w/\partial z$, traçamos todos os ramos que levam de $w$ a $z$, o que nos dá

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}\\ &= (2r)(2z) + v(xy) + s(0) + (3t^2)(2yz)\\ &= 4z\,(x^2 + y^2 + z^2) + xe^y\,(xy) + 0 + 3(yz^2)^2\,(2yz)\\ &= 4z(x^2 + y^2 + z^2) + x^2ye^y + 6y^3z^5\end{aligned}$$

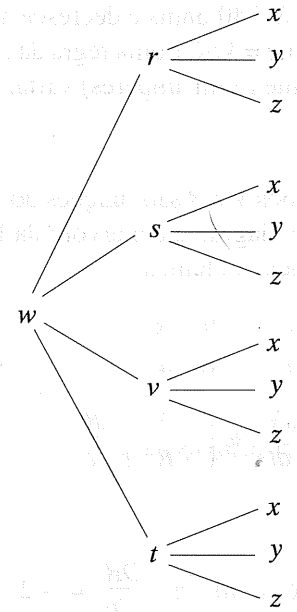



Figura 16.42

Se $w$ é função de diversas variáveis, cada uma das quais é função de apenas *uma* variável $t$, então $w$ é função dessa variável única $t$ e é lícito considerar $dw/dt$. Pode-se aplicar aqui uma regra da cadeia, como no próximo exemplo.

## EXEMPLO 3

Use uma regra da cadeia para achar $dw/dt$, se

$$w = x^2 + yz, \text{ com } x = 3t^2 + 1,\ y = 2t - 4,\ z = t^3$$

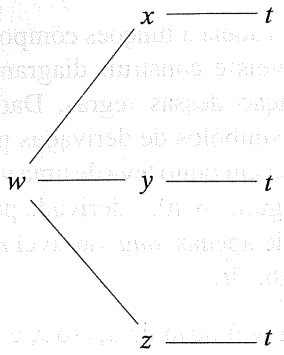



Figura 16.43

## SOLUÇÃO

Para aplicar uma regra da cadeia, construímos o diagrama em árvore da Figura 16.43. Os pares de ramos que levam de $w$ a $t$ dão-nos o seguinte, em que escrevemos $d/dt$ para diferenciação em relação à variável *única* $t$:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= (2x)(6t) + z(2) + y(3t^2)$$

$$= 2(3t^2 + 1)6t + t^3(2) + (2t - 4)3t^2$$

$$= 44t^3 - 12t^2 + 12t$$

Poderíamos também resolver o problema sem apelar para a regra da cadeia, escrevendo

$$w = (3t^2 + 1)^2 + (2t - 4)t^3$$

e achando então $dw/dt$ pelos métodos de uma variável.

---

As regras da cadeia são úteis na resolução de problemas de taxas relacionadas, conforme ilustrado no próximo exemplo.

## EXEMPLO 4

Um circuito elétrico simples consiste em um resistor $R$ e uma força eletromotriz $V$. Em certo instante, $V$ é 80 volts e aumenta à taxa de 5 volts/min, enquanto $R$ é 40 ohms e decresce à razão de 2 ohms/min. Use a lei de Ohm, $I = V/R$, e uma regra da cadeia, para achar a taxa à qual a corrente $I$ (em ampères) varia.

## SOLUÇÃO

Como $I$ é função de $V$ e $R$, e ambos $V$ e $R$ são funções do tempo $t$ (em minutos), consideremos o diagrama em árvore da Figura 16.44. Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

$$= \left(\frac{1}{R}\right)\frac{dV}{dt} + \left(-\frac{V}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}$$

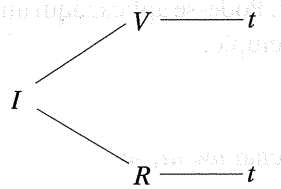



Figura 16.44

Substituindo

$$V = 80, \quad \frac{dV}{dt} = 5, \quad R = 40 \quad \text{e} \quad \frac{DR}{dt} = -2$$

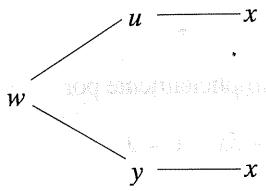



**Figura 16.45**

obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{1}{40}\right)(5) + \left(-\frac{80}{1.600}\right)(-2) = \frac{9}{40} = 0{,}225 \text{ amp/min}$$

---

As derivadas parciais podem ser usadas para achar derivadas de funções definidas implicitamente. Suponhamos que, como na Seção 3.7, uma equação $F(x, y) = 0$ defina uma função diferenciável $f$ tal que $y = f(x)$, isto é, $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x$ no domínio $D$ de $f$. Introduzamos a seguinte função composta $F$:

$$w = F(u, y), \text{ em que } u = x \text{ e } y = f(x)$$

Isto conduz ao diagrama em árvore da Figura 16.45. Com uma regra da cadeia, e em vista do fato de que $u$ e $y$ são funções de *uma* variável $x$, temos:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Como $w = F(x, f(x)) = 0$ para todo $x$, segue-se que $dw/dx = 0$. Além disso, como $u = x$ e $y = f(x)$,

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Fazendo a substituição na fórmula precedente de $dw/dx$, obtemos

$$0 = \frac{\partial w}{\partial u}(1) + \frac{\partial w}{\partial y}f'(x)$$

Se $\partial w/\partial y \neq 0$, então (como $u = x$)

$$f'(x) = -\frac{\partial w/\partial u}{\partial w/\partial y} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial y}$$

$$= -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

Podemos resumir o que precede como a seguir:

**Teorema (16.22)**

Se uma equação $F(x, y) = 0$ define, implicitamente, uma função diferenciável $f$ de uma variável $x$ tal que $y = f(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

**EXEMPLO 5**

Ache $dy/dx$ se $y = f(x)$ é definida implicitamente por

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$$

**SOLUÇÃO**

Se $F(x, y)$ é a expressão do membro esquerdo da equação, então, pelo Teorema (16.22),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-12x^2 - 5}{4y^3 + 3} = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}$$

Compare esta solução com a do Exemplo 2 na Seção 3.7, obtida por intermédio de métodos de uma variável.

---

Dada a equação

$$x^2 - 4y^3 + 2z - 7 = 0$$

podemos resolvê-la em relação a $z$, obtendo

$$z = \tfrac{1}{2}(-x^2 + 4y^3 + 7)$$

que é da forma

$$z = f(x, y)$$

Por analogia com o caso de uma variável, dizemos que a função $f$ de duas variáveis $x$ e $y$ é definida *implicitamente* pela equação dada. O próximo teorema nos dá fórmulas para achar $f_x$ e $f_y$, ou, equivalentemente, $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$, sem resolver efetivamente a equação em relação a $z$.

**Teorema (16.23)**

Se uma equação $F(x, y, z) = 0$ define uma função implícita diferenciável $f$ de duas variáveis $x$ e $y$ tal que $z = f(x, y)$, para todo $(x, y)$ no domínio de $f$, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

**DEMONSTRAÇÃO**

A afirmação $F(x, y, z) = 0$ *define uma função f tal que* $z = f(x, y)$ significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo $(x, y)$ no domínio de $f$. Consideremos a função composta $F$ de $x$ e $y$ definida como segue:

$$w = F(u, v, z), \text{ em que } u = x, v = y, z = f(x, y)$$

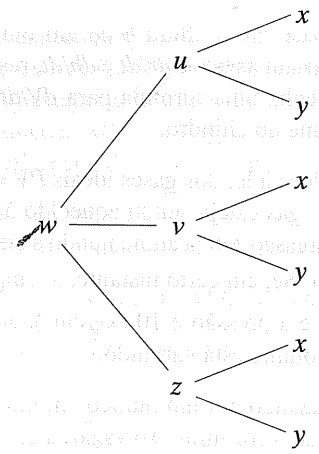



Figura 16.46

Note que $u$ e $v$ são funções de $x$ e $y$, pois podemos escrever $u = x + (0 \cdot y)$ e $v = y + (0 \cdot x)$. Referindo-nos ao diagrama da Figura 16.46 e considerando os ramos que levam de $w$ a $x$, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Como $w = F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo $x$ e todo $y$, segue-se que $\partial w/\partial x = 0$. Além disso, como $\partial u/\partial x = 1$ e $\partial v/\partial x = 0$, a fórmula da regra da cadeia para $\partial w/\partial x$ pode escrever-se

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}(1) + \frac{\partial w}{\partial y}(0) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}$$

e se $\partial w/\partial z \neq 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial z} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

Obtém-se de maneira análoga a fórmula para $\partial z/\partial y$.

### EXEMPLO 6

Ache $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z = f(x, y)$ é definida implicitamente por

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$$

### SOLUÇÃO

Denotando por $F(x, y, z)$ a expressão à esquerda da equação dada, então, pelo Teorema (16.23),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

## EXERCÍCIOS 16.5

Use a regra da cadeia nos Exercícios 1-14.

**Exercs. 1-2;** Calcule $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$.

1 $w = u \operatorname{sen} v$; $u = x^2 + y^2$, $v = xy$

2 $w = uv + v^2$; $u = x \operatorname{sen} y$, $v = y \operatorname{sen} x$

**Exercs. 3-4:** Calcule $\partial w/\partial r$ e $\partial w/\partial s$.

3 $w = u^2 + 2uv$; $u = r \ln s$, $v = 2r + s$

4 $w = e^{tv}$; $t = r + s$, $v = rs$

**Exercs. 5-6:** Calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

5 $z = r^3 + s + v^2$; $r = xe^y$, $s = ye^x$, $v = x^2y$

6 $z = pq + qw$; $p = 2x - y$, $q = x - 2y$, $w = -2x + 2y$

**Exercs. 7-8:** Calcule $\partial r/\partial u$, $\partial r/\partial v$ e $\partial r/\partial t$.

7 $r = x \ln y$; $x = 3u + vt$, $y = uvt$

8 $r = w^2 \cos z$; $w = u^2vt$, $z = ut^2$

9 Se $p = u^2 + 3v^2 - 4w^2$, em que $u = x - 3y + 2r - s$, $v = 2x + y - r + 2s$ e $w = -x + 2y + r + s$, ache $\partial p/\partial r$.

**10** Ache $\partial s/\partial y$ se $s = tr + ue^v$, em que $t = xy^2z$, $r = x^2yz$, $u = xyz^2$ e $v = xyz$.

**Exercs. 11-14:** Calcule $dw/dt$.

**11** $w = x^3 - y^3$; $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{t}{t+1}$

**12** $w = \ln(u+v)$; $u = e^{-2t}$, $v = t^3 - t^2$

**13** $w = r^2 - s \operatorname{tg} v$; $r = \operatorname{sen}^2 t$, $s = \cos t$, $v = 4t$

**14** $w = x^2y^3z^4$; $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = 5t + 4$

**Exercs. 15-18:** Utilize derivadas parciais para calcular $dy/dx$ se $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação dada.

**15** $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$ **16** $x^4 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$

**17** $6x + \sqrt{xy} = 3y - 4$ **18** $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

**Exercs. 19-22:** Calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z = f(x, y)$ é definida implicitamente pela equação dada.

**19** $2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0$

**20** $xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2 = 0$

**21** $xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$

**22** $yx^2 + z^2 + \cos xyz = 4$

**Exercs. 23-32:** Use a regra da cadeia.

**23** O raio $r$ e a altura $h$ de um cilindro circular reto aumentam à razão de 0,01 cm/min e 0,02 cm/min, respectivamente.

(a) Ache a taxa de variação do volume quando $r = 4$ cm e $h = 7$ cm.

(b) A que taxa a área da superfície curva está variando nesse instante?

**24** Os lados iguais e o ângulo correspondente de um triângulo isósceles estão aumentando à razão de 3 cm/h e 2°/h, respectivamente. Ache a taxa à qual a área do triângulo está aumentando no instante em que o comprimento de cada um dos lados iguais é de 6 metros e o ângulo correspondente é 60°.

**25** A pressão $P$, o volume $V$ e a temperatura $T$ de um gás confinado estão relacionados pela lei dos gases ideais $PV = kT$, em que $k$ é uma constante. Se $P$ e $V$ variam às taxas de $dP/dt$ e $dV/dt$, respectivamente, ache uma fórmula para $dT/dt$.

**26** Se o raio da base $r$ e a altura $h$ de um cilindro circular reto variam às taxas $dr/dt$ e $dh/dt$, respectivamente, obtenha uma fórmula para $dV/dt$, em que $V$ é o volume do cilindro.

**27** Certo gás obedece à lei dos gases ideais $PV = 8T$. Suponha que o gás esteja sendo aquecido à taxa de 2°/min e a pressão esteja aumentando à taxa de $\frac{1}{2}$ (kg/cm$^2$)/min. Se, em certo instante, a temperatura é de 200° e a pressão é 10 (kg/cm$^2$), ache a taxa à qual o volume está variando.

**28** A areia está vazando por um buraco em um recipiente à razão de 6 cm$^3$/min. Ao vazar, a areia vai formando uma pilha em forma de um cone circular reto cujo raio da base aumenta à razão de $\frac{1}{4}$ cm/min. Se, no instante em que já vazaram 40 cm$^3$, o raio é de 5 centímetros, determine a taxa de aumento da altura da pilha.

**29** Na idade de 2 anos, um menino típico tem 86 centímetros de altura, pesa 13 quilos e cresce à razão de 9 cm/ano e 2 kg/ano. Use a fórmula de DuBois e DuBois para a área de uma superfície, $S = 0{,}007184x^{0{,}425}y^{0{,}725}$ para o peso $x$ e a altura $y$, para estimar a taxa à qual a área da superfície do corpo está crescendo (ver Exercício 49 da Seção 16.1).

**30** Quando o tamanho das moléculas e suas forças de atração são levadas em conta, a pressão $P$, o volume $V$ e a temperatura $T$ de um mol de gás confinado estão relacionados pela *equação de van der Waals*

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = kT$$

em que $a$, $b$ e $k$ são constantes positivas. Se $t$ é o tempo, estabeleça uma fórmula para $dT/dt$ em termos de $dP/dt$, $dV/dt$, $P$ e $V$.

**31** Se $n$ resistores $R_1, R_2, \ldots, R_n$ estão ligados em paralelo, então a resistência total $R$ é dada por

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

Prove que, para $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial R}{\partial R_k} = \left(\frac{R}{R_k}\right)^2$$

**32** Uma função $f$ de duas variáveis é *homogênea de grau n* se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo $t$ tal que $(tx, ty)$ esteja no domínio de $f$. Mostre que, para tais funções, $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$. (*Sugestão:* Diferencie $f(tx, ty)$ em relação a $t$.)

**Exercs. 33-36:** Ref. Exercício 32. Ache o grau $n$ da função homogênea $f$ e verifique a fórmula

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$$

**33** $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3$

**34** $f(x, y) = \dfrac{x^3y}{x^2 + y^2}$

**35** $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

**36** $f(x, y) = xye^{y/x}$

**37** Se $w = f(x, y)$, em que $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

**38** Se $w = f(x, y)$, em que $x = e^r \cos \theta$ e $y = e^r \operatorname{sen} \theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$

**39** Se $w = f(x, y)$, em que $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$$

**40** Se $v = f(x - at) + g(x + at)$ e $f$ e $g$ têm derivadas parciais segundas, mostre que $v$ satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

(Compare com o Exercício 42 da Seção 16.3.)

**41** Se $w = \cos(x + y) + \cos(x - y)$ mostre, sem utilizar fórmulas de adição, que $w_{xx} - w_{yy} = 0$.

**42** Se $w = f(x^2 + y^2)$, mostre que $y(\partial w/\partial x) - x(\partial w/\partial y) = 0$. (*Sugestão:* Faça $u = x^2 + y^2$.)

**43** Se $w = f(u, v)$, em que $u = g(x, y)$ e $v = k(x, y)$, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\ \partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\ \partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

**44** Para $w$, $u$ e $v$ dadas como no Exercício 43, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\ \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v\ \partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\ \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\ \partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\ \partial x}$$

**45** Prove o seguinte teorema do valor médio para uma função $f$ de duas variáveis $x$ e $y$: se $F$ tem derivadas parciais primeiras em uma região retangular $R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ e se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos de $R$, então existe um ponto $P(x^*, y^*)$ no segmento $AB$ tal que

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f_x(x^*, y^*)(x_2 - x_1) + f_y(x^*, y^*)(y_2 - y_1)$$

**46** Use o Exercício 45 para provar o seguinte: Se $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$ para todo $(x, y)$ em uma região retangular $R$, então $f(x, y)$ é constante em $R$.

**47** Estenda o Exercício 45 a uma função de três variáveis.

**48** Estenda o Exercício 46 a uma função de três variáveis.

**49** Suponha que $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$ verifiquem as equações de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Se $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

**50** Se $u = y/(x^2 + y^2)$ e $v = x/(x^2 + y^2)$, verifique diretamente as fórmulas para $\partial u/\partial r$ e $\partial v/\partial r$ no Exercício 49, substituindo $x$ por $r \cos \theta$ e $y$ por $r \operatorname{sen} \theta$, e diferenciando.

## 16.6 DERIVADAS DIRECIONAIS

Na Seção 16.3 abordamos o fato de que, se $f(x, y)$ é a temperatura de uma chapa de metal plana no ponto $P(x, y)$ de um plano-$xy$, então as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ dão as taxas instantâneas de variação da temperatura em relação à distância nas direções horizontal e vertical, respectivamente (ver Figuras 16.28 e 16.29). Nesta seção generalizaremos este fato para a taxa de variação de $f(x, y)$ em *qualquer* direção.

Seja $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ um vetor unitário. Representando $\mathbf{u}$ por um vetor com ponto inicial $P(x, y)$, conforme Figura 16.47(i), então o ponto terminal tem coordenadas $(x + u_1, y + u_2)$. Queremos definir a taxa de variação de $f(x, y)$ em relação à distância na direção determinada por $\mathbf{u}$.

Consideremos uma reta $l$ por $P$ paralela a $\mathbf{u}$, e seja $Q$ um ponto arbitrário de $l$, conforme Figura 16.47(ii). O vetor $\overrightarrow{PQ}$ corresponde a um múltiplo escalar $s\mathbf{u} = (su_1)\mathbf{i} + (su_2)\mathbf{j}$ para algum $s$. Logo, as coordenadas de $Q$ são $(x + su_1, y + su_2)$. Como $\mathbf{u}$ é um vetor unitário,

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|s\mathbf{u}\| = |s|\,\|\mathbf{u}\| = |s|$$

Assim, $s$ é a distância (com sinal) de $P$, medida ao longo de $l$. Se $s > 0$, então $s\mathbf{u}$ tem a mesma direção que $\mathbf{u}$. Se $s < 0$, então $s\mathbf{u}$ tem a direção oposta.

Se a posição de um ponto varia de $P$ para $Q$, então o incremento $\Delta w$ de $w = f(x, y)$ é

$$\Delta w = f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)$$

A *taxa média de variação de* $f(x, y)$ *é*

$$\frac{\Delta w}{s} = \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}$$

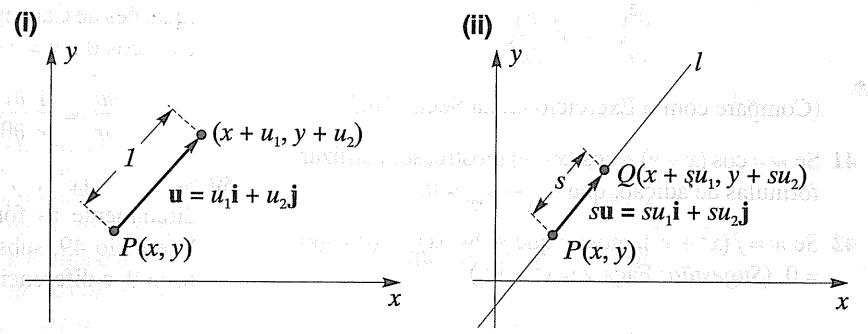



**Figura 16.47**

A título de ilustração, seja $w = f(x, y)$ a temperatura em $(x, y)$. Se a temperatura em $P$ é de 50° e a temperatura em $Q$ é de 51,5°, então $\Delta w = 1{,}5°$. Se $\|\overrightarrow{PQ}\| = 3$ cm, a taxa média de variação da temperatura, quando um ponto se move de $P$ até $Q$, é

$$\frac{\Delta w}{s} = 0{,}5° \text{ por cm}$$

Tal como no estudo das derivadas, para achar a taxa *instantânea* de variação de $f(x, y)$ em $P$ na direção definida por $\mathbf{u}$, consideramos o limite da taxa média de variação $\Delta w/s$ quando $s \to 0$. Isto motiva a seguinte definição.

**Definição (16.24)**

Sejam $w = f(x, y)$ e $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ um vetor unitário. A **derivada direcional de $f$ em $P(x, y)$ na direção de $\mathbf{u}$**, denotada por $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$, é

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}$$

Se $\mathbf{a}$ é um vetor arbitrário de mesma direção que $\mathbf{u}$, chamaremos também $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ a **derivada direcional de $f$ na direção de $\mathbf{a}$**.

O teorema que segue dá uma fórmula para achar derivadas direcionais.

**Teorema (16.25)**

Se $f$ é uma função diferenciável de duas variáveis e $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ é um vetor unitário, então

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2$$

## DEMONSTRAÇÃO

Consideremos $x$, $y$, $u_1$ e $u_2$ como fixos (embora arbitrários), e seja $g$ a função de *uma* variável definida por

$$g(s) = f(x + su_1, y + su_2)$$

Pelas Definições (3.6) e (16.24),

$$g'(0) = \lim_{s \to 0} \frac{g(s) - g(0)}{s - 0}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}$$

$$= D_{\mathbf{u}} f(x, y)$$

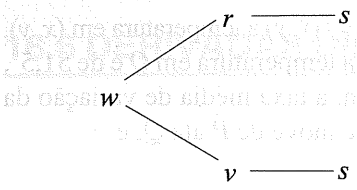



**Figura 16.48**

Consideramos em seguida $g$ como uma função composta, com

$$w = g(s) = f(r, v) \text{ e } r = x + su_1,\ v = y + su_2$$

Conforme indicado pelo diagrama em árvore da Figura 16.48, $w$ é uma função de $r$ e $v$, e $r$ e $v$ são funções de *uma* variável. Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{dr}{ds} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

Com as definições de $w = g(s)$, $r$ e $v$, a última expressão pode ser escrita

$$g'(s) = f_r(r, v)u_1 + f_v(r, v)u_2$$

Fazendo $s = 0$, então $r = x$, $v = y$ e, pela primeira parte da demonstração, $g'(0) = D_{\mathbf{u}} f(x, y)$. Logo

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2$$

As derivadas parciais primeiras de $f$ são casos especiais da derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$. Assim, fazendo $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, então $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, e a fórmula em (16.25) se escreve

$$D_{\mathbf{i}} f(x, y) = f_x(x, y)$$

Se $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, então $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, e obtemos

$$D_{\mathbf{j}} f(x, y) = f_y(x, y)$$

## EXEMPLO 1

Seja $f(x, y) = x^3y^2$.

**(a)** Ache a derivada direcional de $f$ no ponto $P(-1, 2)$ na direção do vetor $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

**(b)** Discuta o significado da parte (a) se $f(x, y)$ é a temperatura em $(x, y)$.

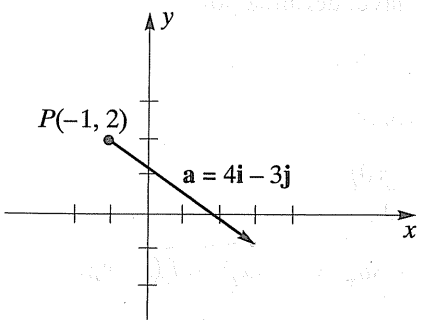



**Figura 16.49**

## SOLUÇÃO

**(a)** O vetor $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ com ponto inicial $P(-1, 2)$ está representado na Figura 16.49. Queremos determinar $D_{\mathbf{u}} f(-1, 2)$ para o vetor *unitário* $\mathbf{u}$ que tem a direção de $\mathbf{a}$. Pelo Teorema (14.12),

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$$

Como

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 \text{ e } f_y(x, y) = 2x^3y$$

segue-se de (16.25) que

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 3x^2y^2\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2x^3y\left(-\tfrac{3}{5}\right)$$

Logo, em $P(-1, 2)$,

$$D\mathbf{u}\, f(-1, 2) = 3(-1)^2(2)^2\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2(-1)^3(2)\left(-\tfrac{3}{5}\right) = 12$$

**(b)** Se $f(x, y)$ é a temperatura (em graus) em $(x, y)$, então $D_{\mathbf{u}} f(-1, 2) = 12$ nos diz que, se um ponto se move na direção de $\mathbf{u}$, a temperatura em $P$ aumenta à razão de 12° por unidade de variação da distância. É interessante comparar este valor com $f_x(-1, 2) = 12$ e $f_y(-1, 2) = -4$, que são as taxas de variação nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

---

Por meio do Teorema (16.25), podemos expressar a derivada direcional como um produto escalar de dois vetores, como segue:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j})] \cdot [u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}]$$

O vetor dentro do primeiro par de colchetes, cujos componentes são as derivadas parciais primeiras de $f(x, y)$, tem grande importância. Denota-se por $\nabla f(x, y)$ (que se lê *del* $f(x, y)$), e tem um nome especial.

**Definição (16.26)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis. O **gradiente** de $f$ (ou de $f(x, y)$) é a função vetorial dada por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

O gradiente $\nabla f(x, y)$ denota-se em geral por **grad** $f(x, y)$. Do que acabamos de ver, temos o seguinte:

**Derivada direcional (forma de gradiente) (16.27)**

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Assim, *para achar a derivada direcional de f na direção do vetor unitário* $\mathbf{u}$, *formamos o produto escalar do gradiente de f e* $\mathbf{u}$. Daqui por diante, usaremos esta fórmula, em lugar do Teorema (16.25), para achar $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$.

O símbolo $\nabla$ (chamado **del**), é um operador diferencial vetorial que se define como

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

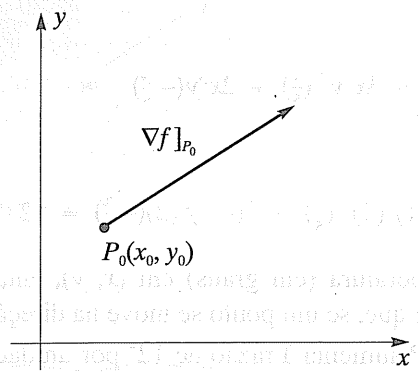



**Figura 16.50**

Suas propriedades são análogas às do operador $d/dx$ (ver Exercícios 35-40). Operando sobre $f(x, y)$, produz o vetor gradiente $\nabla f(x, y)$.

Se $P_0(x_0, y_0)$ é um ponto específico do plano-$xy$, costuma-se denotar o vetor gradiente em $P_0$ por $\nabla f]_{P_0}$. Assim,

$$\nabla f]_{P_0} = \nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

*Quando representamos o vetor $\nabla f]_{P_0}$ graficamente, tomamos sempre o ponto inicial em $P_0$*, conforme Figura 16.50.

## EXEMPLO 2

Seja $f(x, y) = x^2 - 4xy$.

**(a)** Ache o gradiente de $f$ no ponto $P(1, 2)$ e esboce o vetor $\nabla f]_P$.

**(b)** Use o gradiente para achar a derivada direcional de $f$ em $P(1, 2)$ na direção de $P(1, 2)$ para $Q(2, 5)$.

## SOLUÇÃO

**(a)** Pela Definição (16.26),

$$\nabla f(x, y) = (2x - 4y)\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}$$

Em $P(1, 2)$,

$$\nabla f]_P = \nabla f(1, 2) = (2 - 8)\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

Este vetor está representado na Figura 16.51, com ponto inicial $P(1, 2)$.

**(b)** Fazendo $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$, então

$$\mathbf{a} = \langle 2 - 1, 5 - 2\rangle = \langle 1, 3\rangle = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

(ver Figura 16.51). Um vetor unitário com a direção de $\overrightarrow{PQ}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

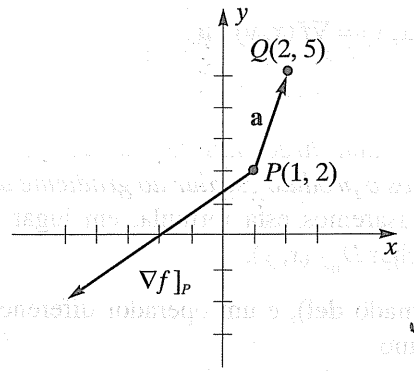



**Figura 16.51**

Aplicando (16.27), temos

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{u}$$

$$= (-6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(-6 - 12) = -\frac{18}{\sqrt{10}} \approx -5{,}7$$

Seja $P(x, y)$ um ponto fixo, e consideremos a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ quando $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ varia. Para um vetor unitário $\mathbf{u}$ dado, a derivada direcional pode ser positiva (isto é, $f(x, y)$ pode aumentar), ou negativa ($f(x, y)$ pode diminuir) ou 0. Em muitas aplicações, é importante achar a direção em que $f(x, y)$ cresce mais rapidamente, bem como o máximo da taxa de variação. O próximo teorema nos dá esta informação.

**Teorema do gradiente (16.28)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x, y)$.

**(i)** O máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $\|\nabla f(x, y)\|$.

**(ii)** O máximo da taxa de crescimento de $f(x, y)$ em $P(x, y)$ ocorre na direção de $\nabla f(x, y)$.

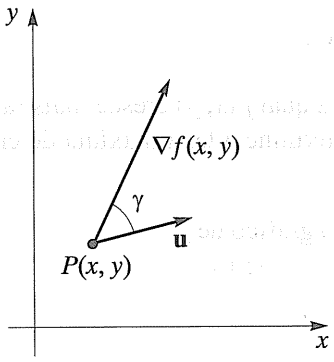



Figura 16.52

## DEMONSTRAÇÃO

**(i)** Consideraremos o ponto $P(x, y)$ e o vetor $\nabla f(x, y)$ como fixos (mas arbitrários) e o vetor $\mathbf{u}$ como variável (ver Figura 16.52). Seja $\gamma$ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\nabla f(x, y)$. Por (16.27) e pelo Teorema (14.22),

$$\begin{aligned} D\mathbf{u}\, f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \, \|\mathbf{u}\| \cos \gamma \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos \gamma \end{aligned}$$

Como $-1 \leq \cos \gamma \leq 1$, o máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ ocorre se $\cos \gamma = 1$; neste caso, $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|$.

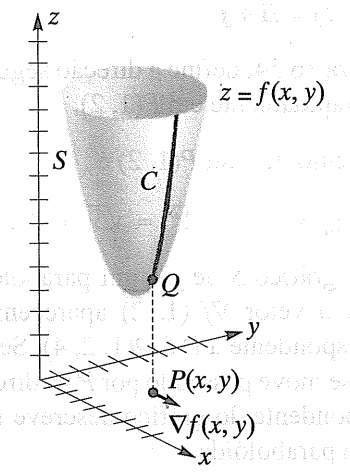



Figura 16.53

**(ii)** A derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ é a taxa de variação de $f(x, y)$ em relação à distância em $P(x, y)$ na direção definida por $\mathbf{u}$. Tal como na parte (i), esta taxa de variação atinge seu máximo se $\cos \gamma = 1$ – isto é, se $\gamma = 0$. Entretanto, se $\gamma = 0$, então $\mathbf{u}$ tem a mesma direção que $\nabla f(x, y)$.

O teorema do gradiente admite uma interpretação geométrica interessante e útil. Denotemos por $S$ o gráfico de $z = f(x, y)$ em um sistema coordenado $xyz$. Como se vê na Figura 16.53, o ponto $P(x, y)$ e o vetor $\nabla f(x, y)$ estão no plano-$xy$, e $Q(x, y, f(x, y))$ é o ponto de $S$ correspondente a $P$. Se um ponto (variável) no plano-$xy$ se move passando por $P$ na direção de $\nabla f(x, y)$, então, por (16.28)(ii), o ponto correspondente em $S$ descreve uma curva $C$ de *aclive máximo* no ponto $Q$ do gráfico de $f$. Na Seção 16.7 abordaremos outro aspecto geométrico de $\nabla f(x, y)$ que envolve as curvas de nível de $f$.

Referindo-nos à demonstração do Teorema do gradiente (16.28), vemos que o *mínimo* de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ ocorre se $\cos \gamma = -1$. Nesse caso, $\gamma = \pi$ (ou $\gamma = 180°$) e $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = -\|\nabla f(x, y)\|$, que é a taxa máxima de *decréscimo* de $f(x, y)$. Isto nos dá o seguinte corolário do Teorema (16.28).

**Corolário (16.29)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x, y)$.

**(i)** O mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $-\|\nabla f(x, y)\|$.

**(ii)** O mínimo da taxa de acréscimo (ou o máximo da taxa de decréscimo) de $f(x, y)$ em $P(x, y)$ ocorre na direção de $-\nabla f(x, y)$.

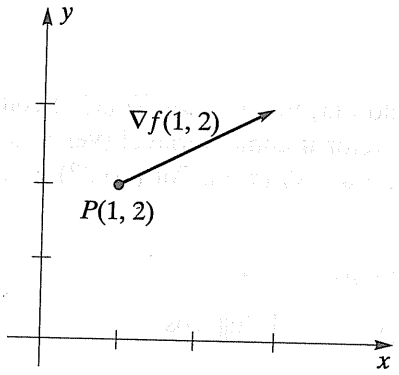



**Figura 16.54**

## EXEMPLO 3

Seja $f(x, y) = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$.

**(a)** Ache a direção segundo a qual $f(x, y)$ cresce mais rapidamente no ponto $P(1, 2)$, e determine a taxa máxima de crescimento de $f$ em $P$.

**(b)** Interprete (a) utilizando o gráfico de $f$.

## SOLUÇÃO

**(a)** O gradiente de $f$ é

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}y\mathbf{j}$$

Em $P(1, 2)$,

$$\nabla f(1, 2) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Este vetor, esboçado na Figura 16.54, define a direção segundo a qual $f(x, y)$ aumenta mais rapidamente em $P(1, 2)$.

A taxa máxima de aumento de $f$ em $P(1, 2)$ é

$$\|\nabla f(1, 2)\| = \|-2\mathbf{i} - \mathbf{j}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2$$

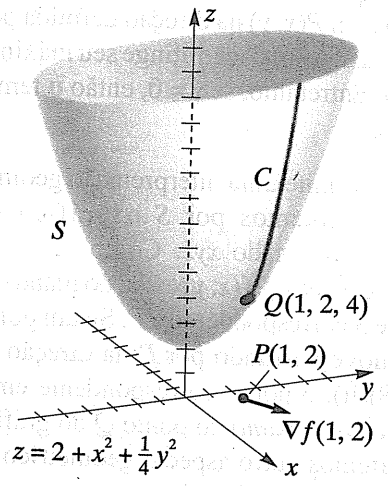



**Figura 16.55**

**(b)** A Figura 16.55 exibe o gráfico $S$ de $f$ – um parabolóide elíptico. O ponto $P(1, 2)$ e o vetor $\nabla f(1, 2)$ aparecem no plano-$xy$. O ponto de $S$ correspondente a $P$ é $Q(1, 2, 4)$. Se um ponto (variável) no plano-$xy$ se move passando por $P$ na direção de $\nabla f(1, 2)$, o ponto correspondente do gráfico descreve uma curva $C$ de máximo aclive no parabolóide.

Define-se a derivada direcional de uma função $f$ de três variáveis da mesma forma que na Definição (16.24). Isto é, se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ é um vetor unitário, temos o seguinte:

**Derivada direcional de $f(x, y, z)$ (16.30)**

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2, z + su_3) - f(x, y, z)}{s}$$

Tal como no caso de duas variáveis, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ é a taxa de variação de $f$ em relação à distância em $P(x, y z)$ na direção de $\mathbf{u}$. O **gradiente** de $f$ (ou de $f(x, y, z)$, denotado por $\nabla f(x, y, z)$ ou **grad** $f(x, y, z)$, se define como segue.

**Gradiente de $f(x, y, z)$ (16.31)**

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Tal como no caso bidimensional, denota-se por $\nabla f\,]_{P_0}$ o gradiente em um ponto específico $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

O próximo resultado constitui a versão tridimensional do Teorema (16.25).

**Teorema (16.32)**

Se $f$ é uma função diferenciável de três variáveis e $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$ é um vetor unitário, então

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$
$$= f_x(x, y, z)\,u_1 + f_y(x, y, z)\,u_2 + f_z(x, y, z)\,u_3$$

Tal como no Teorema (16.28), de todas as derivadas direcionais possíveis $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ no ponto $P(x, y, z)$, a derivada na direção de $\nabla f(x, y, z)$ é a que tem maior valor; esse valor máximo é $\|\nabla f(x, y, z)\|$.

### EXEMPLO 4

Suponhamos que um sistema coordenado $xyz$ esteja localizado no espaço, de modo que a temperatura $T$ no ponto $(x, y, z)$ seja dada pela fórmula $T = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$.

**(a)** Ache a taxa de variação de $T$ em relação à distância no ponto $P(1, 3, -2)$ e na direção do vetor $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**(b)** Em que direção, a partir de $P$, $T$ aumenta mais rapidamente? Qual a taxa máxima de variação de $T$ em $P$?

**SOLUÇÃO**

**(a)** Pela Definição (16.31), o gradiente de $T = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$ é

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

Como

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-200x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-200y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-200z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

obtemos

$$\nabla T = \frac{-200}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Logo

$$\nabla T\,]_P = \frac{-200}{196}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

Um vetor unitário $\mathbf{u}$ de mesma direção de $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u}\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Pelo Teorema (16.32), a taxa de variação de $T$ em $P$ na direção de $\mathbf{a}$ é

$$D_{\mathbf{u}}T\,]_P = \nabla T\,]_P \cdot \mathbf{u} = \frac{-200}{196}\frac{(1-3-2)}{\sqrt{3}} = \frac{200}{49\sqrt{3}} \approx 2{,}4$$

Se, por exemplo, $T$ é medido em graus e a distância em centímetros, então $T$ cresce à razão de 2,4 graus por centímetro em $P$ na direção de $\mathbf{a}$.

**(b)** O máximo da taxa de variação de $T$ em $P$ ocorre na direção do gradiente – isto é, na direção do vetor $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. O máximo da taxa de variação é igual ao módulo do gradiente, isto é,

$$\|\nabla T]_P\| = \frac{200}{196}\sqrt{1 + 9 + 4} \approx 3{,}8$$

---

Nesta seção utilizamos o gradiente de uma função $f$ especialmente para achar derivadas direcionais. Mais adiante abordaremos outros aspectos importantes. Concluiremos esta seção com uma aplicação à termodinâmica.

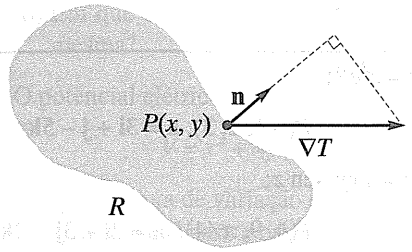



**Figura 16.56**

Seja $T = f(x, y)$ a temperatura de estado estacionário no ponto $(x, y)$ de uma região bidimensional $R$. (*Estado estacionário* significa que $T$ é independente do tempo.) A *lei da condução do calor de Fourier* afirma que a taxa $q$ à qual o calor flui através de um ponto $P(x, y)$ na fronteira de $R$ é diretamente proporcional à componente do gradiente da temperatura $\nabla T$ ao longo do unitário da normal (exterior) $\mathbf{n}$ à fronteira em $P$ (ver Figura 16.56). Assim,

$$q = k \operatorname{comp}_{\mathbf{n}} \nabla T = k \nabla T \cdot \mathbf{n}$$

para algum escalar $k$ (ver Definição (14.25)). Se $\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$, o componente segundo a direção da normal será 0 ($\nabla T$ e $\mathbf{n}$ são ortogonais), e, assim, nenhum calor escapará da região em $P$. Diz-se que a fronteira está *isolada* no ponto $P$. A região está *isolada ao longo de parte da fronteira* se está isolada em todo ponto daquela parte. Valem afirmações análogas para regiões tridimensionais.

## EXEMPLO 5

Seja $R$ a região retangular do plano-$xy$ exibida na Figura 16.57, e seja $T = f(x, y)$ a temperatura de estado estacionário em $(x, y)$. Estabeleça condições sobre $T$ que tornem isolada:

**(a)** a margem $BC$ **(b)** a margem $AB$

## SOLUÇÃO

**(a)** Podemos usar o vetor $\mathbf{i}$ para representar o unitário $\mathbf{n}$ da normal à margem $BC$. Assim, $BC$ estará isolada se e somente se, em cada ponto $P$ de $BC$,

$$\nabla T \cdot \mathbf{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{i} = 0$$

Isto significa que a taxa de variação de $T$ na direção horizontal é 0.

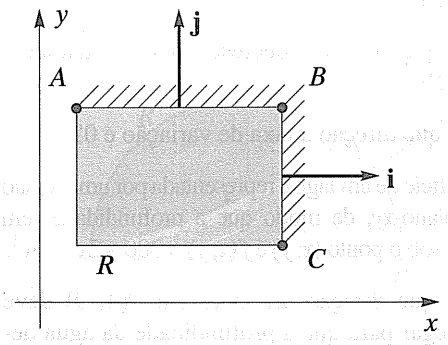



**Figura 16.57**

**(b)** $\mathbf{j}$ é uma normal à margem $AB$. Neste caso, $AB$ estará isolada se e somente se

$$\nabla T \cdot \mathbf{j} = 0 \text{ ou, equivalentemente, } \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

ou seja, a taxa de variação de $T$ na direção vertical é 0.

## EXERCÍCIOS 16.6

**Exercs. 1-6:** Ache o gradiente de $f$ em $P$.

**1** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $P(-4,3)$

**2** $f(x, y) = 7y - 5x$; $P(2, 6)$

**3** $f(x, y) = e^{3x} \operatorname{tg} y$; $P(0, \pi/4)$

**4** $f(x, y) = x \ln (x - y)$; $P(5, 4)$

**5** $f(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$; $P(2, -3, 1)$

**6** $f(x, y, z) = xy^2e^z$; $P(2, -1, 0)$

**Exercs. 7-20:** Ache a derivada direcional de $f$ em $P$ na direção indicada.

**7** $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2$;

$P(3, -1)$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

**8** $f(x, y) = x^3 - 3x^2y - y^3$;

$P(1, -2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$

**9** $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

$P(4, -4)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

**10** $f(x, y) = x^2 \ln y$;

$P(5, 1)$ $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

**11** $f(x, y) = \sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$;

$P(3, -2)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

**12** $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$;

$P(2, -1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

**13** $f(x, y) = x \cos^2 y$;

$P(2, \pi/4)$, $\mathbf{a} = \langle 5, 1 \rangle$

**14** $f(x, y) = xe^{3y}$;

$P(4, 0)$, $\mathbf{a} = \langle -1, 3 \rangle$

**15** $f(x, y, z) = xy^2z^2$;

$P(2, -1, 4)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

**16** $f(x, y, z) = x^2 + 3yz + 4xy$;

$P(1, 0, -5)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**17** $f(x, y, z) = z^2e^{xy}$;

$P(-1, 2, 3)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

**18** $f(x, y, z) = \sqrt{xy}$ sen $z$;

$P(4, 9, \pi/4)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

**19** $f(x, y, z) = (x + y)(y + z)$;

$P(5, 7, 1)$, $\mathbf{a} = \langle -3, 0, 1 \rangle$

**20** $f(x, y, z) = z^2 \operatorname{arctg}(x + y)$;

$P(0, 0, 4)$, $\mathbf{a} = \langle 6, 0, 1 \rangle$

**Exercs. 21-24:** (a) Ache a derivada direcional de $f$ na direção de $P$ para $Q$. (b) Ache um vetor unitário na direção em que $f$ cresce mais rapidamente em $P$ e determine a taxa de variação de f naquela direção. (c) Ache um vetor unitário na direção em que $f$ decresce mais rapidamente em $P$ e determine a taxa de variação de $f$ naquela direção.

**21** $f(x, y) = x^2e^{-2y}$; $P(2, 0)$, $Q(-3, 1)$

**22** $f(x, y) = \text{sen}(2x - y)$; $P(-\pi/3, \pi/6)$, $Q(0, 0)$

**23** $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $P(-2, 3, 1)$, $Q(0, -5, 4)$

**24** $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z}$; $P(0, -1, 2)$, $Q(3, 1, -4)$

**25** Uma chapa de metal está situada em um plano-$xy$, de modo que a temperatura $T$ em $(x, y)$ seja inversamente proporcional à distância da origem, e a temperatura em $P(3, 4)$ é 100° F.

(a) Ache a taxa de variação de $T$ em $P$ na direção de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

(b) Em que direção $T$ aumenta mais rapidamente em $P$?

(c) Em que direção $T$ decresce mais rapidamente em $P$?

(d) Em que direção a taxa de variação é 0?

**26** A superfície de um lago é representada por uma região $D$ no plano-$xy$, de modo que a profundidade (em metros) sob o ponto $(x, y)$ é $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$.

(a) Em que direção um bote em $P(4, 9)$ deve navegar para que a profundidade da água decresça mais rapidamente?

(b) Em que direção a profundidade permanece a mesma?

**27** O potencial elétrico $V$ em $(x, y, z)$ é

$$V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$$

(a) Ache a taxa de variação de $V = P(2, -1, 3)$ na direção de $P$ para a origem.

(b) Ache a direção que produz a taxa máxima de variação de $V$ em $P$.

(c) Qual é a taxa máxima de variação em $P$?

**28** A temperatura $T$ em $(x, y, z)$ é dada por

$$T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$$

(a) Ache a taxa de variação de $T$ em $P(4, -2, 1)$ na direção de $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

(b) Em que direção $T$ aumenta mais rapidamente em $P$?

(c) Qual é esta taxa máxima de variação?

(d) Em que direção $T$ decresce mais rapidamente em $P$?

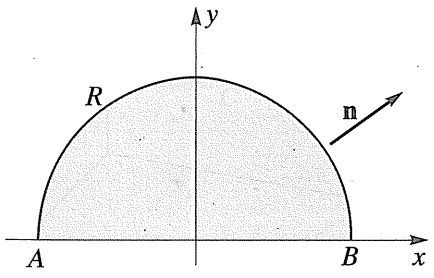
(e) Qual é esta taxa de variação?

**Exercs. 29-30:** Com referência à discussão que precede o Exemplo 5, em cada caso $T$ é a temperatura em $(x, y)$.

**29** A figura exibe uma região semicircular $R$.

(a) Use coordenadas polares para mostrar que a fronteira superior $\overset{\frown}{AB}$ está isolada se e somente se $\partial T/\partial r = 0$. (*Sugestão*: Mostre que, se $T = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ então $\partial T/\partial r = (\partial T/\partial x)\cos\theta + (\partial T/\partial y)\operatorname{sen}\theta$.)

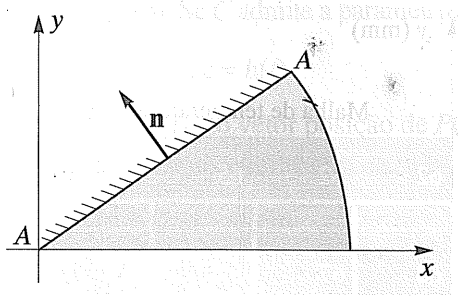
(b) Interprete $\partial T/\partial r$ como taxa de variação de $T$.




**30** A figura exibe um setor circular cuja fronteira $AB$ está isolada.

(a) Use coordenadas polares para mostrar que a condição de isolamento é equivalente a $\partial T/\partial q = 0$ para todo ponto no segmento $AB$.

(b) Interprete $\partial T/\partial\theta$ como taxa de variação de $T$.




**31** Em algumas aplicações pode ser difícil calcular diretamente o gradiente $\nabla f(x, y)$. Usa-se às vezes a aproximação seguinte para os componentes, em que $h \approx 0$:

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y + h) - f(x, y - h)}{2h}$$

(a) Mostre que essas aproximações melhoram quando $h \to 0$.

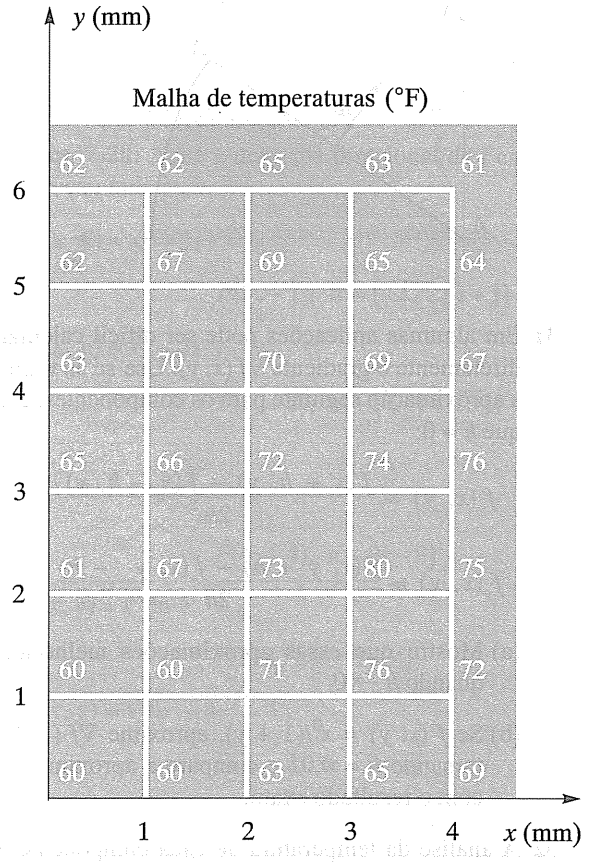
(b) Se $f(x, y) = x^3/(1 + y)$, aproxime $\nabla f(1, 2)$ tomando $h = 0{,}01$ e compare a aproximação com o resultado exato.

**32** A análise da temperatura de cada componente é fundamental para o planejamento de um *chip* de computador. Suponhamos que, para que um *chip* opere adequadamente, a temperatura de cada componente não deva exceder 78° F. Se um componente tende a aquecer, os engenheiros costumam colocá-lo em uma parte fria do *chip*. O planejamento de *chips* é auxiliado por simulação em computador, em que se analisam os gradientes da temperatura. Uma simulação para um novo *chip* resultou na malha de temperaturas (em °F) exibida na figura.

(a) Se $T(x, y)$ é a temperatura em $(x, y)$, use o Exercício 31 com $h = 1$ para aproximar $\nabla T(3, 3)$.

(b) Estime a direção da transferência máxima de calor em (3, 3).

(c) Estime a taxa instantânea de variação de $T$ na direção de $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ em (3, 3).




**Exercs. 33-34:** Estenda as fórmulas de aproximação do Exercício 31 às derivadas parciais primeiras de $f(x, y, z)$, e use então $h = 0{,}01$ para aproximar a derivada direcional de $f$ em $P_0(1, 1, 1)$ na direção de $\mathbf{u}$.

**33** $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y \operatorname{tg} z}{x^3 + y^2 z^4}$; $\quad \mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

**34** $f(x, y, z)$ $\dfrac{x^4 + 3x^2 z^2}{4x^2 y^2 + \cosh(yz)}$; $\quad \mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$

**Exercs. 35-40:** Se $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ e $f$ e $g$ são diferenciáveis, prove a identidade.

**35** $\nabla(cu) = c\,\nabla u$, $c$ constante

**36** $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$

**37** $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

**38** $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ com $v \neq 0$

**39** $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla^u$ para todo real $n$.

**40** Se $w = h(u)$, então $\nabla w = \dfrac{dw}{du}\nabla u$.

**41** Sejam $\mathbf{u}$ um vetor unitário e $\theta$ o ângulo, medido em sentido anti-horário, do eixo-$x$ positivo para o vetor posição correspondente a $\mathbf{u}$.

(a) Mostre que $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos\theta + f_x(x, y)$ sen $\theta$.

(b) Se $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ e $\theta = 5\pi/6$, ache $D_{\mathbf{u}} f(2, -3)$.

**42** Ref. Exercício 41. Se $f(x, y) = (xy + y^2)^4$ e $\theta = \pi/3$, ache $D_{\mathbf{u}} f(2, -1)$.

**43** Se $f$, $f_x$ e $f_y$ são contínuas e $\nabla(x, y) = \mathbf{0}$ em uma região retangular $R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$, prove que $f(x, y)$ é constante em $R$ (ver Exercício 46 da Seção 16.5).

**44** Sejam $w = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ e suponhamos que todas as funções sejam diferenciáveis. Se $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ prove que

$$\frac{dw}{dt} = \nabla w \cdot \mathbf{r}'(t)$$

## 16.7 PLANOS TANGENTES E RETAS NORMAIS

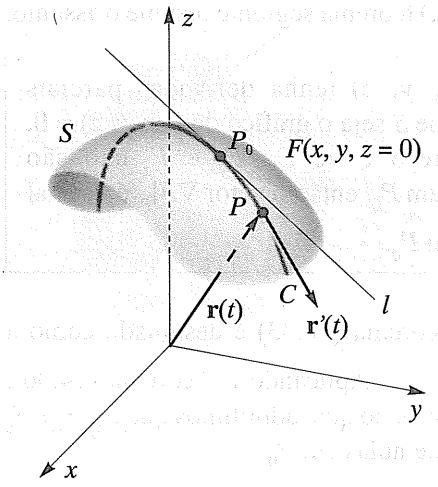



**Figura 16.58**

Suponhamos que uma superfície $S$ seja o gráfico de uma equação $F(x, y, z) = 0$ e que $F$ tenha derivadas parciais primeiras contínuas. Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $S$ no qual $F_x$, $F_y$ e $F_z$ não sejam simultaneamente nulas. Uma **reta tangente** a $S$ em $P_0$ é, por definição, uma reta $l$ tangente a qualquer curva $C$ de $S$ que contenha $P_0$ (ver Figura 16.58). Se $C$ admite a parametrização

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t)$$

para $t$ em algum intervalo $I$ e se $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição de $P(x, y, z)$, então

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Logo,

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

é um vetor tangente a $C$ em $P(x, y, z)$, conforme indicado na Figura 16.58.

Para cada $t$, o ponto $(f(t), g(t), h(t))$ de $C$ está também em $S$ e, portanto,

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0$$

Fazendo

$$w = F(x, y, z), \text{ com } x = f(t), y = g(t), z = h(t)$$

então, aplicando a regra da cadeia, e como $w = 0$ para todo $t$, temos

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Assim, para todo ponto $P(x, y, z)$ de $C$,

$$F_x(x, y, z)f'(t) + F_y(x, y, z)g'(t) + F_z(x, y, z)h'(t) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla F(x, y, z) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Em particular, se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ corresponde a $t = t_0$, então

$$\nabla F]_{P_0} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

Como $\mathbf{r}'(t_0)$ é um vetor tangente a $C$ em $P_0$, isto implica que *o vetor* $\nabla F]_{P_0}$ *é ortogonal a toda reta tangente* $l$ *a* $S$ *em* $P_0$ (ver Figura 16.59).

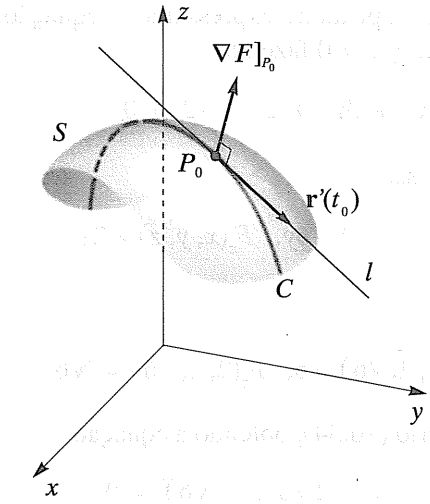



**Figura 16.59**

O plano por $P_0$ com vetor normal $\nabla F]_{P_0}$ é o **plano tangente** a $S$ **em** $P_0$. Mostramos que *toda reta tangente l a S em* $P_0$ *está no plano tangente em* $P_0$. O teorema seguinte resume o assunto.

**Teorema (16.33)**

Suponhamos que $F(x, y, z)$ tenha derivadas parciais primeiras contínuas e que $S$ seja o gráfico de $F(x, y, z) = 0$. Se $P_0$ é um ponto de $S$ e se $F_x$, $F_y$ e $F_z$ não são simultaneamente nulas em $P_0$, então o vetor $\nabla F]_{P_0}$ é normal ao plano tangente a $S$ em $P_0$.

O vetor $\nabla F]_{P_0}$ do Teorema (16.33) é designado como a *normal à superfície S em* $P_0$. Aplicando o Teorema (14.36), obtemos o seguinte corolário, no qual admitimos que $F_x$, $F_y$ e $F_z$ não sejam simultaneamente nulas em $P_0$.

**Corolário (16.34)**

A equação do plano tangente ao gráfico de $F(x, y, z) = 0$ no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

## EXEMPLO 1

Ache a equação do plano tangente ao elipsóide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ no ponto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$ e ilustre graficamente.

## SOLUÇÃO

Para usar o Corolário (16.34), primeiro expressamos a equação da superfície na forma $F(x, y, z) = 0$ fazendo

$$F(x, y, z) = \tfrac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 - 12 = 0$$

As derivadas parciais de $F$ são

$$F_x(x, y, z) = \tfrac{3}{2}x, \quad F_y(x, y, z) = 6y, \quad F_z(x, y, z) = 2z$$

e, então, em $P_0(2, 1, \sqrt{6})$

$$F_x(2, 1, \sqrt{6}) = 3, \quad F_y(2, 1, \sqrt{6}) = 6, \quad F_z(2, 1, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

Aplicamos agora o Corolário (16.34), obtendo a equação

$$3(x - 2) + 6(y - 1) + 2\sqrt{6}(z - \sqrt{6}) = 0$$

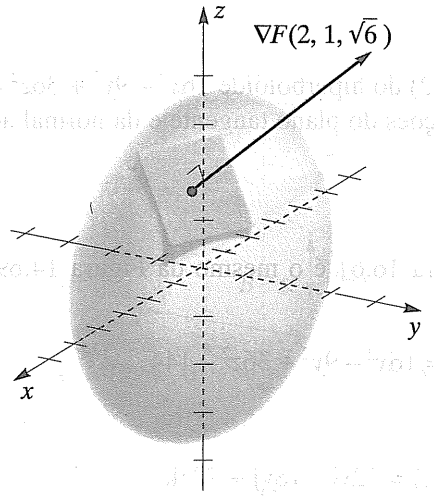



Figura 16.60

ou, equivalentemente,

$$3x + 6y + 2\sqrt{6}z = 24$$

O elipsóide tem interceptos $x$, $y$, $z$, $\pm 4$, $\pm 2$ e $\pm\sqrt{12}$, respectivamente, e está ilustrado na Figura 16.60. O vetor normal ao plano tangente no ponto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$ é

$$\nabla F]_{P_0} = \nabla F(2, 1, \sqrt{6}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\sqrt{6}\mathbf{k}$$

conforme figura.

---

Se $z = f(x, y)$ é a equação de $S$, e fazendo $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, então a equação do Corolário (16.34) toma a forma

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0$$

Isto nos dá o seguinte teorema.

**Teorema (16.35)**

A equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, z_0)$ é

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

A reta perpendicular ao plano tangente em um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de uma superfície $S$ é **reta normal** a $S$ em $P_0$. Se $S$ é o gráfico de $F(x, y, z) = 0$, então a normal é paralela ao vetor $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

## EXEMPLO 2

Ache a equação da normal ao elipsóide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ no ponto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$.

## SOLUÇÃO

Esta superfície é a mesma do Exemplo 1. Conseqüentemente, o vetor

$$\nabla F(2, 1, \sqrt{6}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\sqrt{6}\mathbf{k}$$

exibido na Figura 16.60 é paralelo à reta normal. Aplicando o Teorema (14.34), obtemos as seguintes equações paramétricas da reta normal:

$$x = 2 + 3t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = \sqrt{6} + 2\sqrt{6}t; \; t \text{ em } \mathbb{R}$$

---

**EXEMPLO 3**

Seja $P_0$ o ponto $(3, -4, 2)$ do hiperbolóide $16x^2 - 9y^2 + 36z^2 = 144$. Determine as equações do plano tangente e da normal ao hiperbolóide em $P_0$.

**SOLUÇÃO**

O hiperbolóide da Figura 16.61 é o mesmo da Figura 14.69. Fazendo

$$F(x, y, z) = 16x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 144$$

obtemos

$$\nabla F(x, y, z) = 32x\mathbf{i} - 18y\mathbf{j} + 72z\mathbf{k}$$

Logo, o vetor normal ao hiperbolóide em $P_0(3, -4, 2)$ é

$$\nabla F]_{P_0} = 96\mathbf{i} + 72\mathbf{j} + 144\mathbf{k}$$

Qualquer múltiplo escalar de $\nabla F]_{P_0}$ é também um vetor normal. Em particular, como

$$\nabla F]_{P_0} = 24(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

podemos tomar $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Assim, a equação do plano tangente em $P_0(3, -4, 2)$ é

$$4(x - 3) + 3(y + 4) + 6(z - 2) = 0$$

ou, equivalentemente,

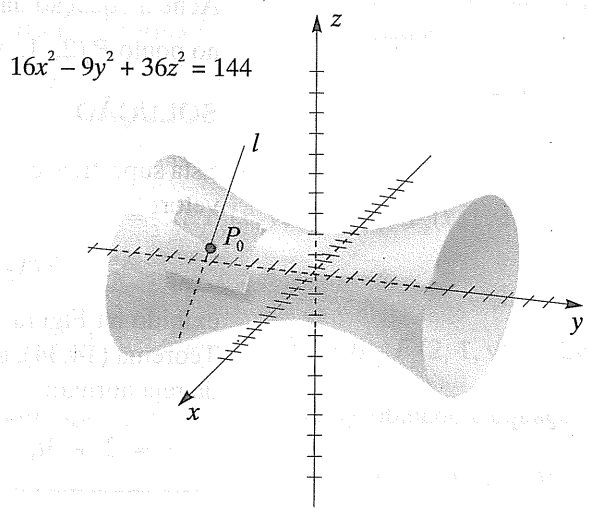



**Figura 16.61**

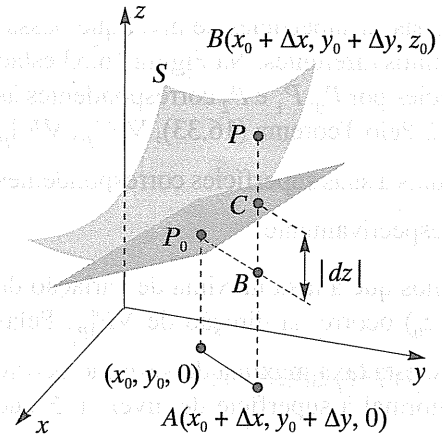



**Figura 16.62**

$$4x + 3y + 6z = 12$$

Este plano tem interceptos $x$, $y$ e $z$, 3, 4 e 2, respectivamente (ver Figura 16.61). Note que, ao contrário do caso do Exemplo 1, o plano tangente em $P_0$, aqui, intercepta a superfície em muitos pontos.

Tomando **a** como vetor normal, chegamos às seguintes equações paramétricas da reta normal $l$ da figura:

$$x = 3 + 4t,\ y = 4 + 3t,\ z = 2 + 6t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

---

Seja $S$ o gráfico da equação $z = f(x, y)$. O plano tangente a $S$ em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ permite obter uma interpretação geométrica para a diferencial

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y$$

definida em (16.15). Como

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

o ponto $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ está em $S$ (ver Figura 16.62).

Seja $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z)$ um ponto no plano tangente, e consideremos os pontos $A(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, 0)$ e $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0)$ na Figura 16.62. Como $C$ está no plano tangente, suas coordenadas verificam a equação do Teorema (16.35), isto é,

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 + \Delta y - y_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y = dz$$

Em termos de distâncias, mostramos que $|dz| = \|\overrightarrow{BC}\|$, isto é, $|dz|$ *é a distância de B ao ponto do plano tangente diretamente acima (ou abaixo) de B*. Este é o análogo do caso de uma variável $y = f(x)$, abordado na Seção 3.5, em que interpretamos $dy$ como a distância a um ponto em uma reta tangente ao gráfico de $f$ (ver Figura 3.27). Segue-se que, quando tomamos $dz$ como uma aproximação da variação de $z$, admitimos que a superfície $S$ quase coincida com seu plano tangente em pontos próximos de $P_0$.

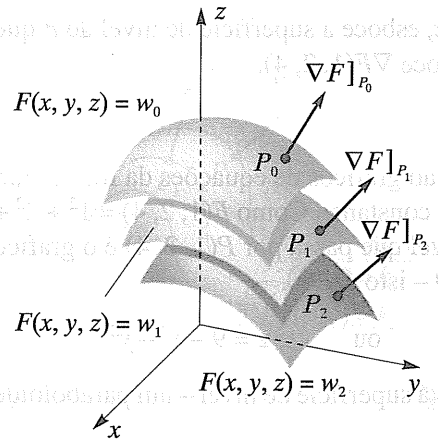



**Figura 16.63** Superfícies isotérmicas.

Como aplicação do conteúdo desta seção, suponhamos um sólido, um líquido ou um gás situado em um sistema coordenado tridimensional, de tal modo que a temperatura no ponto $P(x, y, z)$ seja $w = F(x, y, z)$. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto fixo, então o gráfico da equação

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$$

é a superfície de nível (isotérmica) que passa por $P_0$. Em todo ponto desta superfície, a temperatura é $w_0 = F(x_0, y_0, z_0)$. É

interessante visualizar todas as superfícies de nível que possamos obter escolhendo pontos diferentes. Na Figura 16.63 estão esboçadas várias superfícies por $P_0$, $P_1$ e $P_2$ correspondentes às temperaturas $w_0$, $w_1$ e $w_2$. Pelo Teorema (16.33), $\nabla F]_{P_0}$, $\nabla F]_{P_1}$ e $\nabla F]_{P_2}$ são vetores normais a suas superfícies correspondentes nos pontos $P_0$, $P_1$ e $P_2$, respectivamente.

Na Seção 16.6, vimos que a taxa máxima de variação de $F(x, y, z)$ em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ocorre na direção de $\nabla F]_{P_0}$. Pelas observações precedentes, esta taxa máxima de variação ocorre em uma direção que é normal à superfície de nível de $F$ que contém $P_0$.

O teorema a seguir resume estas observações.

**Teorema (16.36)**

Sejam $F$ uma função de três variáveis diferenciável em $P_0(x_0, y_0, z_0)$, e $S$ a superfície de nível de $F$ que contém $P_0$. Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então este vetor gradiente é normal a $S$ em $P_0$. Assim, a direção da taxa máxima de variação de $F(x, y, z)$ em $P_0$ é normal a $S$.

A Figura 16.63 ilustra o teorema precedente; ali, a taxa máxima de variação da temperatura ocorre em direções normais às superfícies isotérmicas. Outra ilustração reside na teoria da eletricidade, em que $F(x, y, z)$ é o potencial em $(x, y, z)$. Se uma partícula se move em uma das superfícies de nível (eqüipotenciais), o potencial permanece constante. O potencial varia mais rapidamente quando uma partícula se move em uma direção normal a uma superfície eqüipotencial.

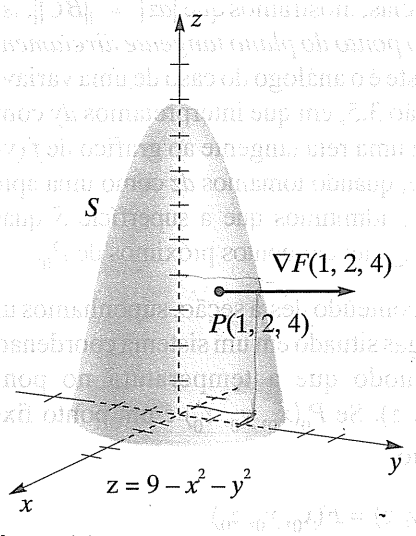



**Figura 16.64**

**EXEMPLO 4**

Se $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$, esboce a superfície de nível de $F$ que passa por $P(1, 2, 4)$; esboce $\nabla F(1, 2, 4)$.

**SOLUÇÃO**

As superfícies de nível são gráficos de equações da forma $F(x, y, z) = k$, em que $k$ é uma constante. Como $F(1, 2, 4) = 1^2 + 2^2 + 4 = 9$, a superfície de nível que passa por $P(1, 2, 4)$ é o gráfico da equação $F(x, y, z) = 9$ – isto é, de

$$x^2 + y^2 + z = 9 \qquad \text{ou} \qquad z = 9 - x^2 - y^2$$

A Figura 16.64 ilustra esta superfície de nível – um parabolóide de revolução.

O gradiente de $F$ é $\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Em $P\,(1, 2, 4)$,

$$\nabla F\,(1, 2, 4) = 2(1)\mathbf{i} + 2(2)\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

A Figura 16.64 ilustra o vetor $\nabla F(1, 2, 4)$. Pelo Teorema (16.36), $\nabla F\,(1, 2, 4)$ é ortogonal à superfície de nível $S$ em $P$.

---

O resultado seguinte, para funções de *duas* variáveis, é análogo ao Teorema (16.36).

**Teorema (16.37)**

Sejam $f$ uma função de duas variáveis diferenciável em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $C$ a curva de nível de $f$ que contém $P$. Se $\nabla f\,(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, então este vetor gradiente é ortogonal a $C$ em $P_0$. Assim, a direção da taxa máxima de variação de $f\,(x, y)$ em $P_0$ é ortogonal a $C$.

A Figura 16.65 ilustra graficamente o Teorema (16.37) para uma função arbitrária $f$ de duas variáveis. As curvas de nível por $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são os gráficos de $f\,(x, y) = k_0$, $f\,(x, y) = k_1$ e $f\,(x, y) = k_2$, respectivamente em que $k_0 = f\,(x_0, y_0)$, $k_1 = f\,(x_1, y_1)$, e $k_2 = f\,(x_2, y_2)$. Pelo Teorema (16.37), os vetores $\nabla f]_{P_0}$, $\nabla f]_{P_1}$ e $\nabla f]_{P_2}$ são ortogonais às curvas de nível, conforme indicado na figura. Se cada curva de nível $C$ é uma isobárica em um mapa meteorológico, então a pressão barométrica permanece inalterada quando um ponto percorre $C$. O vetor $\nabla f]_P$ em um ponto $P$ de uma isobárica aponta a direção em que a pressão barométrica varia mais rapidamente.

Como ilustração específica do Teorema (16.37), se $f\,(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, então as curvas de nível são dadas por $9 - x^2 - y^2 = k$, em que $k$ é um número real (ver Exemplo 3 da Secção 16.1). A Figura 16.66 ilustra algumas dessas curvas de nível (círculos). Pelo Teorema 16.37, a taxa máxima (ou mínima) de variação de $f\,(x, y)$ ocorre se $(x, y)$ se move em direção ortogonal a esses círculos e, conseqüentemente, ao longo de retas pela origem. Isto corresponde ao movimento do ponto $(x, y, f\,(x, y))$ para cima ou para baixo ao longo da maior aclividade do gráfico de $f$ ilustrada na Figura 16.64.

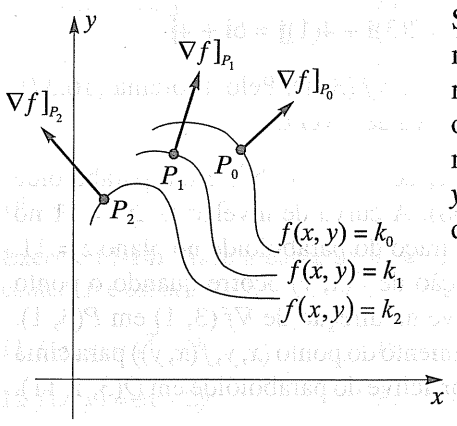



**Figura 16.65**

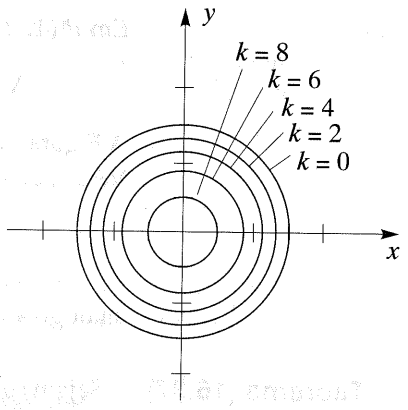



**Figura 16.66** Curvas de nível: $9 - x^2 - y^2 = k$.

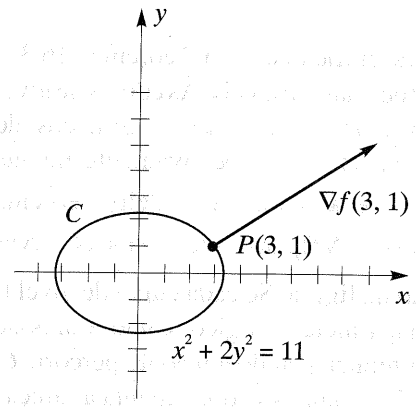



**Figura 16.67**

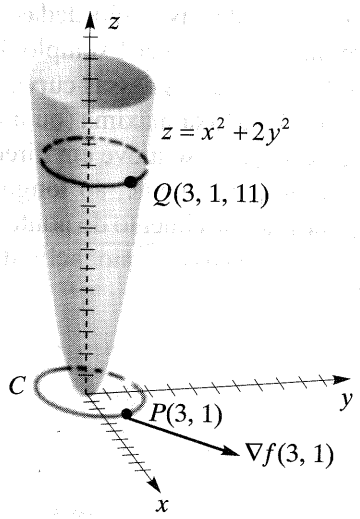



**Figura 16.68**

## EXEMPLO 5

Seja $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

**(a)** Trace a curva de nível $C$ de $f$ que passa pelo ponto $P(3, 1)$ e esboce $\nabla f(3, 1)$.

**(b)** Discuta o significado da parte (a) em termos do gráfico de $f$.

## SOLUÇÃO

**(a)** Como $f(3, 1) = 3^2 + 2(1)^2 = 9 + 2 = 11$, a curva de nível de $f$ que passa pelo ponto $P(3, 1)$ é dada por $f(x, y) = 11$ – isto é, por

$$x^2 + 2y^2 = 11$$

O gráfico é a elipse ilustrada na Figura 16.67. O gradiente de $f$ é

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$$

e então $$\nabla f(3, 1) = 2(3)\mathbf{i} + 4(1)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

A Figura 16.67 exibe o vetor $\nabla f(3, 1)$. Pelo Teorema (16.37), este vetor é ortogonal à curva de nível $C$.

**(b)** O gráfico de $f$ (isto é, de $z = x^2 + 2y^2$) é um parabolóide elíptico (ver Figura 16.68). A curva de nível $x^2 + 2y^2 = 11$ no plano-$xy$ corresponde ao traço do parabolóide no plano $z = 11$. A taxa máxima de variação de $f(x, y)$ ocorre quando o ponto $(x, y)$ no plano-$xy$ se move na direção de $\nabla f(3, 1)$ em $P(3, 1)$. Isto corresponde ao movimento do ponto $(x, y, f(x, y))$ para cima ao longo da parte de maior aclive do parabolóide em $Q(3, 1, 11)$.

Os planos tangentes podem ser utilizados para obter aproximações sucessivas da solução de um sistema de duas equações não-lineares, $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, a partir de uma primeira aproximação $(x_1, y_1)$, procedendo-se como a seguir:

**Passo 1** Aplicar o Teorema (16.35) para achar equações dos planos tangentes aos gráficos de $f$ e $g$ nos pontos $(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ e $(x_1, y_1, g(x_1, y_1))$.

**Passo 2** Achar o traço no plano-$xy$ de cada plano tangente do passo 1.

**Passo 3** Achar o ponto de intersecção $(x_2, y_2)$ dos traços obtidos no passo 2.

**Passo 4** Tomar $(x_2, y_2)$ como segunda aproximação e repetir os passos 1-3.

Este processo constitui uma descrição geométrica do método de Newton, estudado no fim da Seção 16.4.

## EXERCÍCIOS 16.7

**Exercs. 1-10:** Determine equações do plano tangente e da normal ao gráfico da equação no ponto $P$.

**1** $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10$; $P(2, -3, 1)$

**2** $9x^2 - 4y^2 - 25z^2 = 40$; $P(4, 1, -2)$

**3** $z = 4x^2 + 9y^2$; $P(-2, -1, 25)$

**4** $z = 4x^2 - y^2$; $P(5, -8, 36)$

**5** $xy + 2yz - xz^2 + 10 = 0$; $P(-5, 5, 1)$

**6** $x^3 - 2xy + z^3 + 7y + 6 = 0$; $P(1, 3, -3)$

**7** $z = 2e^{-x}\cos y$; $P(0, \pi/3, 1)$

**8** $z = \ln xy$; $P(\frac{1}{2}, 2, 0)$

**9** $x = \ln \dfrac{y}{2z}$; $P(0, 2, 1)$

**10** $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$; $P(-1, 2, 1)$

**Exercs. 11-14:** Trace a curva de nível $C$ de $F$ que contém $P$ e esboce $\nabla F]_P$.

**11** $f(x, y) = y^2 - x^2$; $P(2, 1)$

**12** $f(x, y) = 3x - 2y$; $P(-2, 1)$

**13** $f(x, y) = x^2 - y$; $P(-3, 5)$

**14** $f(x, y) = xy$; $P(3, 2)$

**Exercs. 15-20:** Trace a superfície de nível $S$ de $F$ que contém $P$ e esboce $\nabla F]_P$.

**15** $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $P(1, 5, 2)$

**16** $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$; $P(2, -2, 1)$

**17** $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$; $P(3, 4, 1)$

**18** $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$; $P(3, -1, 1)$

**19** $F(x, y, z) = x^2 + y^2$; $P(2, 0, 3)$

**20** $F(x, y, z) = z$; $P(2, 3, 4)$

**Exercs. 21-24:** Prove que a equação do plano tangente à superfície quádrica dada, no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, pode ser escrita sob a forma indicada.

**21** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

**22** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

**23** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} - \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

**24** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cz$; $\dfrac{2xx_0}{a^2} + \dfrac{2yy_0}{b^2} = c(z + z_0)$

**25** Ache os pontos do hiperbolóide de duas folhas $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

**26** Mostre que a soma dos quadrados dos interceptos $x, y, z$ de todo plano tangente ao gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ é a constante $a^2$.

**27** Mostre que toda normal a uma esfera passa pelo seu centro.

**28** Ache os pontos do parabolóide $z = 4x^2 + 9y^2$ nos quais a normal é paralela à reta por $P(-2, 4, 3)$ e $Q(5, -1, 2)$.

**29** Diz-se que duas superfícies são ortogonais em um ponto de intersecção $P(x, y, z)$ se suas normais em $P$ são ortogonais. Mostre que os gráficos de $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ (em que $F$ e $G$ têm derivadas parciais) são ortogonais em $P$ se e somente se $F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$.

**30** Ref. Exercício 29. Mostre que a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ são ortogonais em todo ponto de intersecção.

**Exercs. 31-32:** Para o sistema de equações dado e a primeira solução aproximada $(x_1, y_1)$, use os passos 1-3 do fim desta seção para achar uma segunda aproximação $(x_2, y_2)$.

**31** $x^2 - y^3 = 0$, $\quad x^2 + y^2 - 3 = 0$; $\quad (1{,}3;\ 1{,}1)$

**32** $\operatorname{sen} x - \cos y = 0$, $\quad x^2 - y^2 - 1{,}3 = 0$; $\quad (1{,}2;\ 0{,}3)$

## 16.8 EXTREMOS DE FUNÇÕES DE DIVERSAS VARIÁVEIS

No Capítulo 4 estudamos extremos locais e absolutos para funções de uma variável. Nesta seção estenderemos tais conceitos às funções de diversas variáveis.

Uma função $f$ de duas variáveis tem **máximo local** em $(a, b)$ se existe um disco aberto $R$ contendo $(a, b)$ tal que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo $(x, y)$ em $R$. Os máximos locais correspondem aos pontos altos do gráfico $S$ de $f$, conforme se vê na Figura 16.69. Da mesma forma, a função $f$ tem **mínimo local** em $(c, d)$ se existe um disco aberto $R$ contendo $(c, d)$ tal que $f(x, y) \geq f(c, d)$ para todo $(x, y)$ em $R$. Os mínimos locais correspondem aos pontos baixos do gráfico de $f$, conforme Figura 16.70.

Uma região no plano-$xy$ é **limitada** se é uma sub-região de um disco fechado. Se $f$ é contínua em uma região $R$ fechada e limitada, então $f$ tem **máximo** $f(a, b)$ e **mínimo** $f(c, d)$ para algum $(a, b)$ e algum $(c, d)$ em $R$, isto é

$$f(c, d) \leq f(x, y) \leq f(a, b)$$

para todo $(x, y)$ em $R$. A demonstração pode ser encontrada em textos de cálculo avançado.

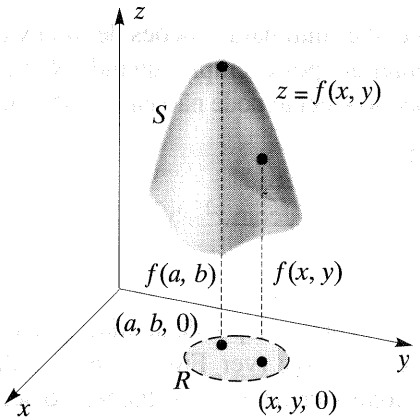



**Figura 16.69** Máximo local $f(a, b)$.

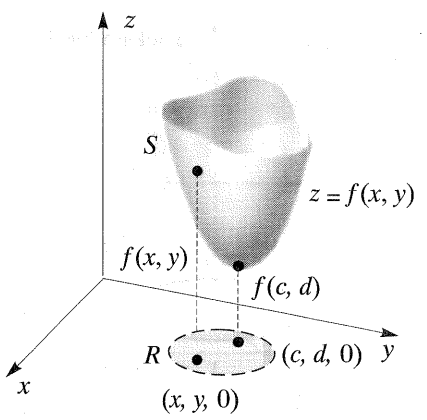



**Figura 16.70** Mínimo local $f(c, d)$.

Os máximos e mínimos locais são os **extremos locais** de $f$. Os **extremos** também incluem o máximo e o mínimo (se existirem). Se $f$ tem derivadas parciais primeiras contínuas em $(x_0, y_0)$ e se $f(x_0, y_0)$ é um extremo local de $f$, então o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ em $(x_0, y_0, z_0)$ é paralelo ao plano-$xy$ e, assim, sua equação é $z = z_0$. Segue-se do Teorema (16.35) que $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$. Portanto, os pares que originam extremos locais devem ser soluções de *ambas* as equações

$$f_x(x, y) = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 0$$

Tal como no caso de funções de uma variável, podem ocorrer extremos locais em $(x, y)$ mesmo que $f_x(x, y)$ ou $f_y(x, y)$ não exista. Todos esses pares são de grande importância para achar os extremos, e por isso recebem nome especial.

**Definição (16.38)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis. Um par $(a, b)$ é **ponto crítico** de $f$ se

**(i)** $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou

**(ii)** $f_x(a, b)$ ou $f_y(a, b)$ não existe

Na pesquisa de extremos locais de uma função, em geral começamos por determinar os pontos críticos. Testamos então cada par para ver se se trata de máximo ou mínimo local.

Um máximo ou um mínimo de uma função de duas variáveis podem ocorrer em um ponto-fronteira de seu domínio $R$. A pesquisa de tais **extremos na fronteira** em geral exige um processo separado, da mesma forma que no caso de extremos

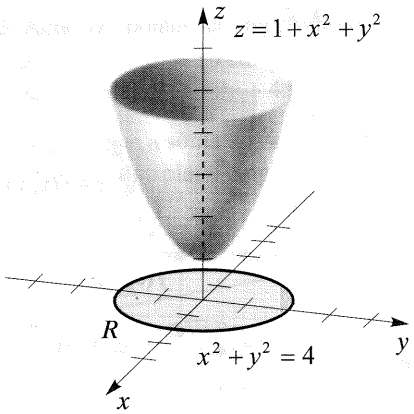



**Figura 16.71**

nos pontos inicial e final para funções de uma variável. Se não há pontos-fronteira – por exemplo, quando $R$ é todo o plano-$xy$ ou um disco aberto – então pode não haver extremos na fronteira.

## EXEMPLO 1

Seja $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$, com $x^2 + y^2 \leq 4$. Ache os extremos de $f$.

## SOLUÇÃO

A restrição $x^2 + y^2 = 4$ corresponde ao disco fechado $R$ de raio 2 e centro $O$ no plano-$xy$ (ver Figura 16.71). Pela Definição (16.38)(i), os pontos críticos são soluções do seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

O único par que satisfaz ambas as equações é (0, 0); logo, $f(0, 0) = 1$ é o único extremo local possível. Além disso, como

$$f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 > 1 \text{ se } (x, y) \neq (0, 0)$$

$f$ tem o mínimo local 1 em (0, 0). Isto é evidente também pelo gráfico de $f$, esboçado na Figura 16.71. O valor funcional $f(0, 0) = 1$ é também o mínimo de $f$ em $R$.

Para achar possíveis extremos na fronteira, investigamos pontos $(a, b)$ que estejam na fronteira de $R$. Com base na figura, vê-se que qualquer um desses pontos (por exemplo, (0, 2)) conduz ao máximo $f(0, 2) = 5$.

---

Conforme ilustrado pelo próximo exemplo, nem todo ponto crítico pode conduzir a um extremo.

## EXEMPLO 2

Se $f(x, y) = y^2 - x^2$ e o domínio de $f$ é $\mathbb{R}^2$, ache os extremos de $f$.

## SOLUÇÃO

Pela Definição (16.38)(i), os pontos críticos são soluções do seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Tal como no Exemplo 1, o único extremo local possível é $f(0, 0) = 0$. Todavia, se $y \neq 0$, então $f(0, y) = y^2 > 0$, e se $x \neq 0$, então $f(x, 0) = -x^2 < 0$. Assim, qualquer disco aberto no plano-$xy$ que contenha (0, 0) contém pares nos quais os valores funcionais são

maiores do que $f(0, 0)$ e também pares em que os valores são menores do que $f(0, 0)$. Conseqüentemente, $f$ não tem extremos locais. Este fato é evidente pelo gráfico de $f$, um parabolóide hiperbólico (Figura 16.72).

Para determinar os extremos de uma função mais complicada $f$ de duas variáveis, é conveniente utilizar a seguinte função $D$ chamada *discriminante* de $f$.

**Definição (16.39)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis dotada de derivadas parciais segundas contínuas. O **discriminante** $D$ de $f$ é

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

Uma forma de lembrar a expressão do discriminante consiste em considerar o seguinte determinante, com todas as funções calculadas em $(x, y)$:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Note que admitimos $f_{yx} = f_{xy}$.

O teste que segue é enunciado sem demonstração. É o correspondente ao teste da derivada segunda para funções de uma variável.

**Teste para extremos locais (16.40)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis dotada de derivadas parciais segundas contínuas em todo um disco aberto $R$ que contém $(a, b)$. Se $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ e $D(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é

**(i)** máximo local de $f$ se $f_{xx}(a, b) < 0$

**(ii)** mínimo local de $f$ se $f_{xx}(a, b) > 0$

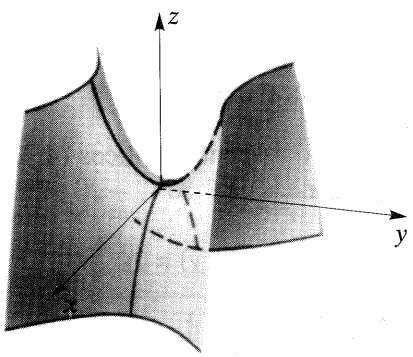



**Figura 16.72**

Note que, se $D(a, b) > 0$, então $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) > [f_{xy}(a, b)]^2$ e, então, $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)$ é positivo, isto é, $f_{xx}(a, b)$ e $f_{yy}(a, b)$ têm o mesmo sinal. Podemos, assim, substituir $f_{xx}(a, b)$ em (i) e (ii) do teste precedente por $f_{yy}(a, b)$.

Um ponto $P(a, b, f(a, b))$ do gráfico de $f$ é **ponto de sela** se $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ e se existe um disco aberto $R$ contendo $(a, b)$ tal que $f(x, y) > f(a, b)$ para alguns pontos $(x, y)$ de $R$ e $f(x, y) < f(a, b)$ para outros pontos. Note que o gráfico do parabolóide hiperbólico da Figura 16.72 tem um ponto de sela

em (0, 0, 0). Em textos de cálculo avançado demonstra-se o seguinte teorema:

**Teorema (16.41)** Seja $f$ dotada de derivadas parciais segundas contínuas em todo um disco aberto $R$ que contém $(a, b)$. Se $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ e $D(a, b) < 0$, então o ponto $P(a, b, f(a, b))$ é ponto de sela do gráfico de $f$.

*Não* podemos usar (16.40) para determinar se $f(a, b)$ é extremo local, se $D(a, b) = 0$, ou se $f_x(a, b)$ ou $f_y(a, b)$ não existe. Em tais casos, devemos analisar a variação de $f(x, y)$ na vizinhança de $(a, b)$ apelando para a definição de $f(x, y)$ ou para o gráfico de $f$. A título de ilustração, se $f(x, y) = -(x^2 + y^{2/3})$, então a derivada parcial $f_y(x, y) = -\frac{2}{3}y^{-1/3}$ não existe se $y = 0$. Logo, *todo* ponto $(a, 0)$ no eixo-$x$ é um ponto crítico de $f$. Pelo gráfico de $f$ na Figura (16.71)(i), é evidente que $f(0, 0) = 0$ é tanto um máximo local como um máximo de $f$ em $\mathbb{R}^2$. Este fato pode ser mostrado algebricamente observando-se que se $(x, y) \neq (0, 0)$, então $f(x, y) < 0$. Como muitas dessas exceções a (16.40) exigem análise complicada, não consideraremos exemplos nem exercícios deste tipo.

## EXEMPLO 3

Se $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, ache os extremos locais e os pontos de sela de $f$.

## SOLUÇÃO

As derivadas parciais primeiras de $f$ são

$$f_x(x, y) = 2x - 4y \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = -4x + 3y^2 + 4$$

Como $f_x$ e $f_y$ existem para todo $(x, y)$, os únicos pontos críticos são as soluções do seguinte sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, vemos que $f$ tem os dois pontos críticos (4, 2) e $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. As derivadas parciais segundas de $f$ são

$$f_{xx}(x, y) = 2, f_{xy}(x, y) = -4, f_{yy}(x, y) = 6y$$

Logo, o discriminante $D$ é dado por

$$D(x, y) = (2)(6y) - (-4)^2 = 12y - 16$$

O restante da solução consta da tábua a seguir.

| Ponto crítico | Valor do discriminante | Valor de $f_{xx}$ | Conclusão |
|---|---|---|---|
| $(4, 2)$ | $D(4, 2) = 8 > 0$ | $f_{xx}(4, 2) = 2 > 0$ | $f(4, 2) = 0$ é mínimo local por (16.40)(ii) |
| $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ | $D\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -8 < 0$ | irrelevante | $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ é ponto de sela por (16.41) |

## EXEMPLO 4

Se $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, ache os extremos de $f$ na região triangular $R$ de vértices $(-1, -1)$, $(7, -1)$ e $(7, 7)$.

## SOLUÇÃO

A fronteira de $R$ consiste nos segmentos de reta $C_1$, $C_2$ e $C_3$, conforme Figura 16.73. No Exemplo 3 vimos que $f$ tem mínimo local 0 no ponto $(4, 2)$, que é interior a $R$. Resta, assim, pesquisarmos os extremos na fronteira.

Em $C_1$ temos $y = -1$, de modo que os valores de $f$ são dados por

$$f(x, -1) = x^2 + 4x - 1 - 4 = x^2 + 4x - 5$$

Isto define uma função de uma variável, cujo domínio é o intervalo $[-1, 7]$. A derivada primeira é $2x + 4$, que é igual a 0 em $x = -2$, um número que está fora do intervalo $[-1, 7]$. Assim, não há extremo local de $f(x, -1)$ em $[-1, 7]$. Como $f(x, -1)$ é crescente em todo este intervalo, obtemos os extremos nos pontos terminais

$$f(-1, -1) = -8 \qquad \text{e} \qquad f(7, -1) = 72$$

Em $C_2$, temos $x = 7$ e os valores de $f$ são dados por

$$f(7, y) = 49 - 28y + y^3 + 4y = y^3 - 24y + 49$$

para $-1 \leq y \leq 7$. A derivada primeira desta função de $y$ é $3y^2 - 24$, havendo, assim, um número crítico se $3y^2 = 24$, ou $y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Tomando a derivada segunda $6y$ de $f(7, y)$, vemos que $f(7, 2\sqrt{2}) = 49 - 32\sqrt{2} \approx 3{,}7$ é mínimo local de $f$ *no segmento* $C_2$. Todavia, *não* é mínimo de $f$ em $R$, pois $f(-1, -1) = -8 < 3{,}7$. Os valores de $f$ nas extremidades de $C_2$ são

$$f(7, -1) = 72 \qquad \text{e} \qquad f(7, 7) = 224$$

Finalmente, em $C_3$ temos $y = x$, e os valores de $f$ são dados por

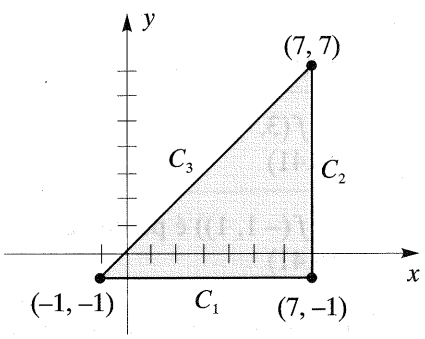



**Figura 16.73**

$$f(x, x) = x^2 - 4x^2 + x^3 + 4x = x^3 - 3x^2 + 4x$$

A derivada primeira $3x^2 - 6x + 4$ não tem raízes reais, não havendo, assim, números críticos para $f(x, x)$. Já calculamos os valores nas extremidades $f(-1, -1) = -8$ e $f(7, 7) = 224$. Estes são, pois, os valores mínimo e máximo de $f$ na região triangular $R$.

---

## EXEMPLO 5

Se $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - x^2 - 3x - 4y - 3$, ache os extremos locais e os pontos de sela de $f$.

## SOLUÇÃO

As derivadas parciais primeiras de $f$ são

$$f_x(x, y) = x^2 - 2x - 3 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 4y^2 - 4$$

Como $f_x$ e $f_y$ existem para todo $(x, y)$, os únicos pontos críticos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos os quatro pontos críticos $(3, 1)$, $(3, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$. As derivadas parciais segundas de $f$ são

$$f_{xx}(x, y) = 2x - 2, f_{xy}(x, y) = 0, f_{yy}(x, y) = 8y$$

Logo, o discriminante $D$ é dado por

$$D(x, y) = (2x - 2)(8y) - 0^2 = 16y(x - 1)$$

Vamos dispor nosso trabalho na tabela seguinte:

| Ponto crítico | Valor do discriminante | Valor de $f_{xx}$ | Conclusão |
|---|---|---|---|
| $(3, 1)$ | $D(3, 1) = 32 > 0$ | $f_{xx}(3, 1) = 4 > 0$ | $f(3, 1) = -\frac{44}{3}$ é mínimo local por (16.40)(ii) |
| $(3, -1)$ | $D(3, -1) = -32 < 0$ | irrelevante | $(3, -1, f(3, -1))$ é ponto de sela por (16.41) |
| $(-1, 1)$ | $D(-1, 1) = -32 < 0$ | irrelevante | $(-1, 1, f(-1, 1))$ é ponto de sela por (16.41) |
| $(-1, -1)$ | $D(-1, -1) = 32 > 0$ | $f_{xx}(-1, -1) = -4 < 0$ | $f(-1, -1) = \frac{4}{3}$ é máximo local por (16.40)(i) |

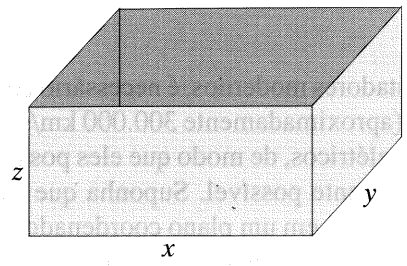



**Figura 16.74**

## EXEMPLO 6

Deve-se construir um depósito retangular sem tampa com volume $V = 12\ m^3$. O custo por metro quadrado do material a ser usado é de \$ 400,00 para o fundo, \$ 300,00 para dois dos lados opostos, e \$ 200,00 para os lados opostos restantes. Determine as dimensões do depósito que minimizem o custo.

## SOLUÇÃO

Conforme Figura 16.74, sejam $x$ e $y$ as dimensões (em metros) da base e $z$ a altura (em metros). Como a área da base é $xy$ e há dois lados de área $xz$ e dois lados de área $yz$, o custo $C$ (em cruzeiros) do material é

$$C = 400\,xy + 300(2xz) + 200(2yz)$$

em que $x$, $y$ e $z$ são positivos. Como $V = xyz = 12$, segue-se que $z = 12/(xy)$. Substituindo $z$ na fórmula de $C$ e simplificando, obtemos

$$C = 400\,xy + \frac{7.200}{y} + \frac{4.800}{x}$$

Não há pontos fronteira, pois $x > 0$ e $y > 0$ para todo $(x, y)$. Logo, não há extremos na fronteira. Para achar possíveis extremos locais, resolvemos o seguinte sistema de duas equações:

$$C_x = 400y - \frac{4.800}{x^2} = 0, \quad C_y = 400x - \frac{7.200}{y^2} = 0$$

São equações equivalentes:

$$y = \frac{12}{x^2} \quad \text{e} \quad xy^2 = 18$$

Substituindo $y = 12/x^2$ na segunda equação, obtemos

$$x\left(\frac{144}{x^4}\right) = 18, \quad \text{ou} \quad 144 = 18x^3$$

Logo, $x^3 = 8$ ou $x = 2$. Como $y = 12/x^2$, o valor correspondente de $y$ é $\frac{12}{4}$ ou 3. Pelo Teorema (16.40), pode-se mostrar que estes valores de $x$ e $y$ determinam um mínimo de $C$. Finalmente, com $z = 12/(xy)$, obtemos $z = 12/(3 \times 2) = 2$. Assim, o custo mínimo ocorre se as dimensões da base são 3 m por 2 m e a altura é de 2 m. Os lados maiores devem ser construídos com o material de \$ 200,00 e os lados menores com o material de \$ 300,00 o metro quadrado.

## EXEMPLO 7

No planejamento de computadores modernos, é necessário considerar a velocidade da luz (aproximadamente 300.000 km/seg) ao posicionar componentes elétricos, de modo que eles possam comunicar-se o mais rapidamente possível. Suponha que três componentes estejam localizados em um plano coordenado em $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ e que cada ângulo do triângulo $P_1P_2P_3$ seja inferior a 120°. Um quarto componente, que se comunicará igualmente com os outros três, deve ser colocado em um ponto $P(x, y)$ que minimize a demora total entre a transmissão e a recepção de sinais (ver Figura 16.75). Se $P$ é colocado adequadamente, ache os ângulos entre os seguintes pares de vetores:

$$\overrightarrow{P_1P},\ \overrightarrow{P_2P};\quad \overrightarrow{P_1P},\ \overrightarrow{P_3P};\quad \overrightarrow{P_2P},\ \overrightarrow{P_3P}$$

## SOLUÇÃO

Sejam $d_1$, $d_2$ e $d_3$ as distâncias entre $P$ e $P_1$, $P$ e $P_2$ e $P$ e $P_3$, respectivamente. Assim,

$$d_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2},\quad k = 1, 2, 3$$

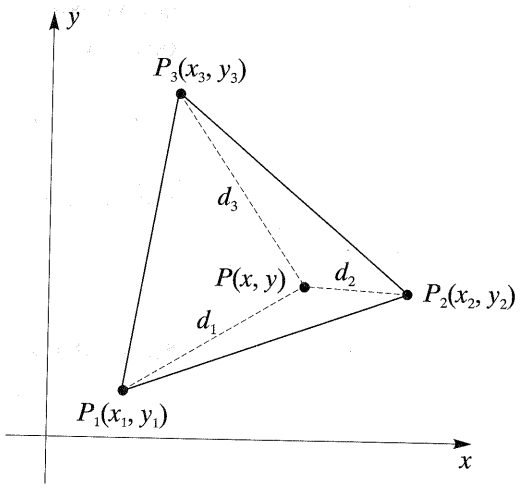



**Figura 16.75**

O tempo mínimo entre a transmissão e a recepção de sinais corresponde ao valor de $(x, y)$ que dê o mínimo de

$$f(x, y) = d_1 + d_2 + d_3$$

Para achar os pontos críticos de $f$, consideremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \dfrac{x - x_1}{d_1} + \dfrac{x - x_2}{d_2} + \dfrac{x - x_3}{d_3} = 0 \\ f_y(x, y) = \dfrac{y - y_1}{d_1} + \dfrac{y - y_2}{d_2} + \dfrac{y - y_3}{d_3} = 0 \end{cases}$$

Transpondo, em cada equação, o último termo para o lado direito, elevando cada membro ao quadrado e somando, obtemos

$$\left(\frac{x-x_1}{d_1} + \frac{x-x_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{y-y_1}{d_1} + \frac{y-y_2}{d_2}\right)^2 = \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}{d_3^2} = 1$$

Você verificará que esta expressão se simplifica para

$$(*) \qquad \frac{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)}{d_1 d_2} = -\frac{1}{2}$$

Seja $\theta$ o ângulo entre os vetores

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j}$$

e

$$\overrightarrow{P_2P} = (x - x_2)\mathbf{i} + (y - y_2)\mathbf{j}$$

Aplicando o Corolário (14.20) e levando em conta (*), temos

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{P_1P} \cdot \overrightarrow{P_2P}}{\|\overrightarrow{P_1P}\| \, \|\overrightarrow{P_2P}\|} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$. Por simetria, os ângulos $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_3P}$ e entre $\overrightarrow{P_2P}$ e $\overrightarrow{P_3P}$ devem também ser iguais a 120°, conforme ilustrado na Figura 16.76.

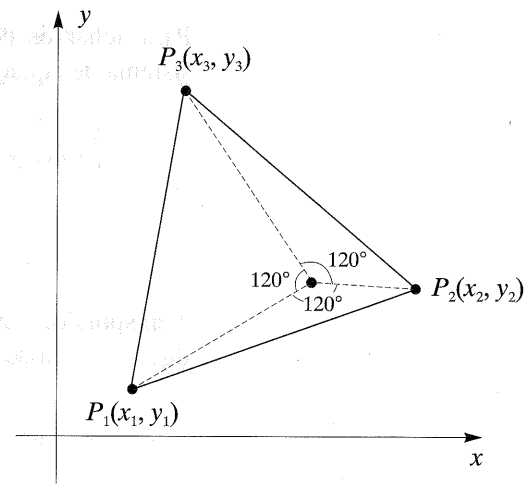



**Figura 16.76**

O que se discutiu nesta seção pode ser generalizado para funções de mais de duas variáveis. Por exemplo, dada $f(x, y, z)$, definimos os máximos e mínimos locais de maneira análoga à do caso de duas variáveis. Se $f$ tem derivadas parciais primeiras, então só pode haver extremo local em um ponto em que $f_x$, $f_y$ e $f_z$ sejam simultaneamente 0. É difícil estabelecer testes para determinar se tal ponto corresponde a um máximo, ou mínimo ou nenhum deles. Todavia, nas aplicações, esta determinação é feita analisando-se a natureza física do problema.

## EXERCÍCIOS 16.8

**Exercs. 1-20:** Ache os extremos e os pontos de sela de $f$.

**1** $f(x, y) = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 1$

**2** $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 12$

**3** $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

**4** $f(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$

**5** $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

**6** $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$

**7** $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$

**8** $f(x, y) = x^2 + xy$

**9** $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + x - 8y$

**10** $f(x, y) = -2x^2 - 2xy - \frac{3}{2}y^2 - 14y - 5y$

**11** $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 32y + 4$

**12** $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4y$

**13** $f(x, y) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$

**14** $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 4xy - 9x - y^2$

**15** $f(x, y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$

**16** $f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 12y$

**17** $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

**18** $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

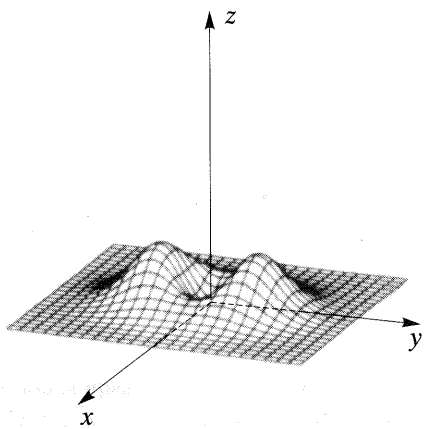
**19** $f(x, y) = \dfrac{4y + x^2y^2 + 8x}{xy}$

**20** $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

**21** A figura exibe o gráfico de

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

Mostre que há cinco pontos críticos e ache os extremos de $f$.

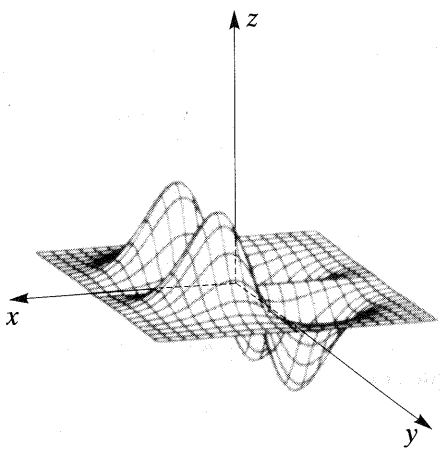



**22** A figura exibe o gráfico de

$$f(x, y) = xy^2e^{-(x^2 + y^2)^4}$$

(a) Mostre que há um número infinito de pontos críticos.

(b) Ache as coordenadas dos quatro pontos críticos exibidos na figura.




**Exercs. 23-28:** Ache o máximo e o mínimo de $f$ em $R$. (Recorra aos Exercícios 3-8 para extremos locais.)

**23** $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$;

a região $R$ delimitada pela elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

**24** $f(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$;

a região triangular $R$ delimitada pelas retas $y = x$, $y = -x$ e $y = 2$.

**25** $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$;

$R = \{(x, y): -2 \le x \le 4, -1 \le y \le 3\}$

**26** $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$;

$R = \{(x, y): |x| \le 3, |y| \le 2\}$

**27** $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$;

a região triangular $R$ com vértices $(1, 2)$, $(1, -2)$ e $(-1, -2)$.

**28** $f(x, y) = x^2 + xy$;

a região $R$ delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 9$.

**29** Ache a menor distância do ponto $P(2, 1, -1)$ ao plano $4x - 3y + z = 5$.

**30** Ache a menor distância entre os planos paralelos $2x + 3y - z = 2$ e $2x + 3y - z = 4$.

**31** Ache os pontos do gráfico de $xy^3z^2 = 16$ mais próximos da origem.

**32** Ache três números reais positivos cuja soma seja 1.000 e cujo produto seja máximo.

**33** Se uma caixa retangular aberta deve ter um volume fixo $V$, que dimensões relativas minimizarão a área da superfície?

**34** Se uma caixa retangular aberta deve ter uma área de superfície fixa $A$, que dimensões relativas maximizarão o volume?

**35** Ache as dimensões da caixa retangular de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, que possa ser inscrita no elipsóide

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$$

**36** Generalize o Exercício 35 para um elipsóide arbitrário

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{e^2} = 1$$

**37** Ache as dimensões da caixa retangular de volume máximo que tenha três de suas faces nos planos coordenados, um vértice na origem, e outro vértice no primeiro octante sobre o plano $4x + 3y + z = 12$.

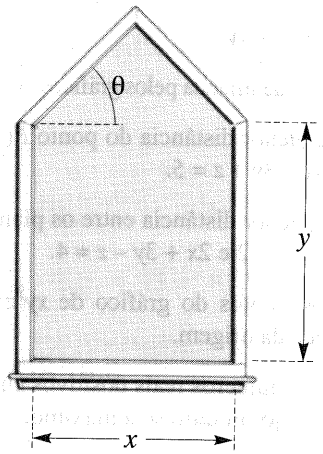
**38** Generalize o Exercício 37 para um plano arbitrário

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

em que $a$, $b$ e $c$ são números reais positivos.

**39** Uma companhia planeja fabricar caixas retangulares de 8 $m^3$ de volume. Determine as dimensões que minimizem o custo, se o material para a tampa e o fundo custa o dobro do material para os lados.

**40** Uma janela tem a forma de um retângulo com um triângulo isósceles sobreposto, conforme a figura. Se o perímetro da janela é de 4 m, que valores de $x$, $y$ e $\theta$ maximizarão a área total?




**41** O serviço postal de um país não aceita caixas retangulares cujo comprimento e perímetro da seção transversa perpendicular ao comprimento somem mais de 108 centímetros. Ache as dimensões da caixa de volume máximo que pode ser despachada pelo correio.

**42** Ache um vetor em três dimensões, de módulo 8, cujos componentes tenham soma máxima.

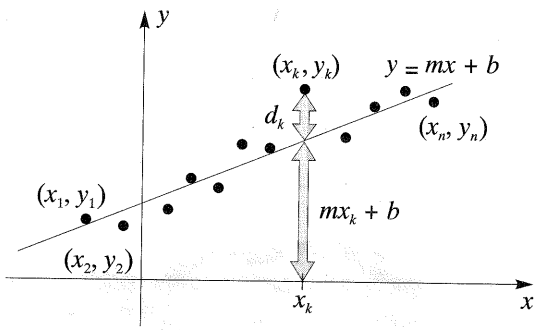
**Exercs. 43-44:** Ref. Exemplo 7.

**43** Três componentes elétricos de um computador estão localizados em $P_1(0, 0)$, $P_2(4, 0)$ e $P_3(0, 4)$. Determine a posição de um quarto componente de modo que a demora do sinal seja mínima.

**44** Mostre que se o triângulo $P_1P_2P_3$ contém um ângulo não inferior a 120°, então $P$ não pode ser posicionado como na Figura 16.76.

**45** Em experimentos científicos, costumam-se tabular como segue valores de duas quantidades $x$ e $y$.

| **valores de $x$** | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| **valores de $y$** | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ |




Grafados os pontos $(x_k, y_k)$, o pesquisador pode ser levado a conjecturar que $x$ e $y$ estejam relacionados *linearmente*, isto é, que $y = mx + b$ para $m$ e $b$ arbitrários. Convém então achar uma reta $l$ que melhor se ajuste ao grupo de dados, conforme se vê na figura. Os estatísticos chamam $l$ uma *reta de regressão linear*.

Uma das técnicas para determinar $l$ é o *método dos mínimos quadrados*. Para aplicar este método, considere, para cada $k$, o *desvio vertical* $d_k = y_k - (mx_k + b)$ do ponto $(x_k, y_k)$ à reta $y = mx + b$ (ver figura). Determinam-se então os valores de $m$ e $b$ que minimizem a soma dos quadrados $\sum_{k=1}^{n} d_k^2$ (tomam-se os quadrados $d_k^2$ porque alguns dos $d_k$ podem ser negativos). Substituindo os $d_k$ obtém-se a seguinte função $f$ de $m$ e $b$:

$$f(m, b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - b)^2$$

Mostre que a reta $y = mx + b$ de melhor ajuste é dada por

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) m + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

e $$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) m + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Pode-se, assim, achar a reta resolvendo este sistema de duas equações com duas incógnitas $m$ e $b$.

**46** Dadas as equações do Exercício 45, mostre que a soma $\sum_{k=1}^{n} d_k$ dos desvios é 0. (Isto significa que os desvios positivos e negativos se anulam mutuamente, o que constitui uma das razões para utilizarmos $\sum_{k=1}^{n} d_k^2$ no método dos mínimos quadrados.)

**Exercs. 47-48:** Use o método dos mínimos quadrados (ver Exercício 45) para determinar uma reta $y = mx + b$ que melhor se ajuste aos dados.

**47**

| **valores de *x*** | 1 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|
| **valores de *y*** | 3 | 5 | 6 |

**48**

| **valores de *x*** | 1 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| **valores de *y*** | 1 | 3 | 2 | 4 |

**49** A tabela a seguir relaciona as médias semestrais e as notas do exame final de dez alunos de um turma de matemática.

| **Média semestral** | 40 | 55 | 62 | 68 |
|---|---|---|---|---|
| **Exame final** | 30 | 45 | 65 | 72 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 72 | 76 | 80 | 86 | 90 | 94 |
| 60 | 82 | 76 | 92 | 88 | 98 |

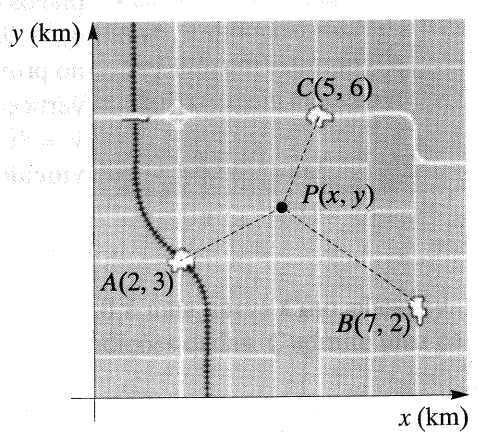
Ajuste uma reta a estes dados e use-a para estimar a nota do exame final de um estudante cuja média semestral seja 70.

**50** Ao estudar o diagrama fadiga-tensão de um material elástico, um engenheiro verifica que parte da curva parece ser linear. A tabela a seguir dá os valores experimentais.

| **Fadiga (kg)** | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tensão (cm)** | 0,25 | 0,75 | 1,00 | 1,50 | 1,75 | 2,25 |

Ajuste uma reta a estes dados e estime a tensão quando a fadiga é de 1,14 kg.

**51** A figura exibe a posição relativa de três cidades $A$, $B$ e $C$. Urbanistas pretendem aplicar o método dos mínimos quadrados para decidir onde construir uma nova escola que atenda às três comunidades. A escola será construída em um ponto $P(x, y, z)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias das cidades $A$, $B$ e $C$ à escola seja mínima. Determine a posição relativa do local de construção.




**52** Generalize o Exercício 51 para o caso de $n$ cidades em posições $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$, ..., $Q_n(x_n, y_n)$.

**53** O Exercício 45 pode ser generalizado para resolver o problema de determinação do plano $z = ax + by + c$ que melhor se ajuste aos dados $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, ..., $(x_n, y_n, z_n)$. O método dos mínimos quadrados procura determinar valores $a$, $b$ e $c$ tais que

$$f(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ax_k - by_k - c)^2$$

seja mínimo.

(a) Estabeleça um sistema de três equações nas três incógnitas $a$, $b$ e $c$.

(b) Ache o plano de melhor ajuste que passa por (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) e (1, 1, 2).

(*Sugestão:* Resolva o sistema de três equações $f_a = 0, f_b = 0, f_c = 0$.)

**54** Três genes $A$, $B$ e $O$ determinam os quatro tipos sangüíneos humanos: $A$($AA$ ou $AO$), $B$($BB$ ou $BO$), $O$($OO$) e $AB$. A *lei de Hardy-Weinberg* afirma que a proporção de indivíduos de uma população que são portadores de dois genes diferentes é dada pela fórmula

$$P = 2pq + 2pr + 2rq,$$

em que $p$, $q$ e $r$ são as proporções de genes $A$, $B$ e $O$, respectivamente, na população. Mostre que $P$ não deve exceder $\frac{2}{3}$. (*Sugestão:* $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ e $p + q + r = 1$.)

**Exercs. 55-56:** Estime os pontos críticos de $f$ em $R = \{(x, y): |x| \leq 1{,}5 \text{ e } |y| \leq 1{,}5\}$ grafando $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$ no mesmo plano coordenado.

**55** $f(x, y) = x^3 \operatorname{sen} x - xy + 4y^2 + y$

**56** $f(x, y) = xy - \operatorname{arctg} x - y^{5/4}$

## 16.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Em muitas aplicações devemos achar os extremos de uma função $f$ de várias múltiplas variáveis, quando estas estão sujeitas a algum vínculo. Vamos supor, por exemplo, que queiramos achar o volume da maior caixa retangular de faces paralelas aos planos coordenados, que possa ser inscrita no elipsóide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$. Note que, por simetria, basta examinar a parte no primeiro octante ilustrada na Figura 16.77. Se $P(x, y, z)$ é o vértice exibido na figura, então o volume $V$ de toda a caixa é $V = 8xyz$. Devemos achar o valor máximo de $V$ sujeito ao **vínculo** (ou **condição lateral**)

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$$

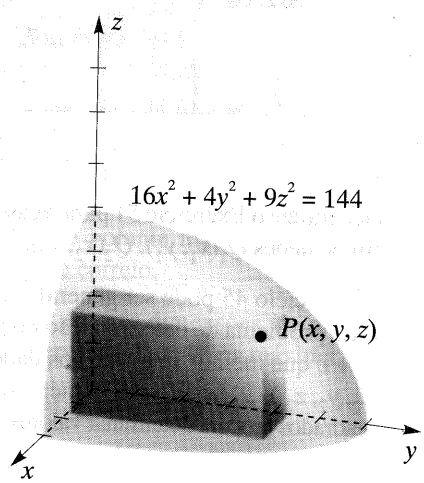



**Figura 16.77**

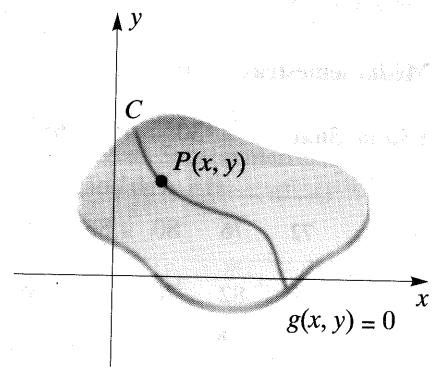



**Figura 16.78**

Resolvendo esta equação em relação a $z$ e levando à fórmula de $V$, obtemos

$$V = (8xy)\tfrac{1}{3}\sqrt{144 - 16x^2 - 4y^2}$$

Podemos agora achar os extremos aplicando (16.40); todavia, este método é trabalhoso em razão dos cálculos envolvidos na determinação das derivadas parciais e dos pontos críticos. Outra desvantagem desta técnica é que, para problemas análogos, nem sempre é possível resolver em relação a $z$. Por estas razões, é mais simples utilizar o método dos *multiplicadores de Lagrange*, estudado nesta seção.*

*Este método foi descoberto por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático francês.

Outra ilustração: Seja $f(x, y)$ a temperatura no ponto $P(x, y)$ da chapa plana de metal da Figura 16.78, e seja $C$ a curva de equação $g(x, y) = 0$. Vamos supor que queiramos achar os pontos de $C$ em que a temperatura atinge seu maior ou seu menor valor. Isto equivale a achar os extremos de $f(x, y)$ *sujeitos ao vínculo* $g(x, y) = 0$. Nossa técnica consiste em utilizar o resultado seguinte.

**Teorema de Lagrange (16.42)**

Sejam $f$ e $g$ funções de duas variáveis dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas, e suponhamos $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em toda uma região do plano-$xy$. Se $f$ tem um extremo $f(x_0, y_0)$ sujeito ao vínculo $g(x, y) = 0$, então existe um número real $\lambda$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

## DEMONSTRAÇÃO

O gráfico de $g(x, y) = 0$ é uma curva $C$ no plano-$xy$. Pode-se mostrar que, sob as condições dadas, $C$ admite uma parametrização suave

$$x = h(t), y = k(t)$$

para $t$ em um intervalo $I$. Seja

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = h(t)\mathbf{i} + k(t)\mathbf{j}$$

o vetor posição do ponto $P(x, y)$ em $C$ (ver Figura (16.79)) e suponhamos que o ponto $P_0(x_0, y_0)$ em que $f$ tem um extremo corresponda a $t = t_0$, isto é,

$$\mathbf{r}(t_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} = h(t_0)\mathbf{i} + k(t_0)\mathbf{j}$$

Definindo uma função $F$ de uma variável $t$ por

$$F(t) = f(h(t), k(t))$$

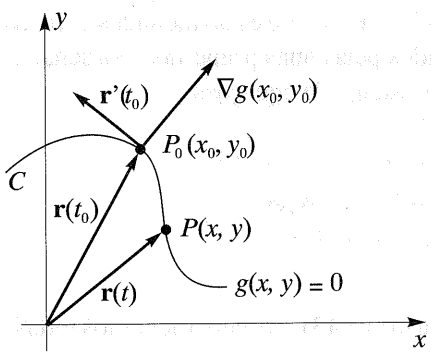



**Figura 16.79**

então, quando $t$ varia, obtemos valores funcionais $f(x, y)$ que correspondem a $(x, y)$ em $C$, isto é, $f(x, y)$ está sujeita ao vínculo $g(x, y) = 0$. Como $f(x_0, y_0)$ é um extremo de $f$ sob essas condições, segue-se que $F(t_0) = f(h(t_0), k(t_0))$ é um extremo de $F(t)$. Assim, $F'(t_0) = 0$. Se encararmos $F$ como uma função composta, então, pela regra da cadeia,

$$F'(t) = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}$$

$$= f_x(x, y)\, h'(t) + f_y(x, y)\, k'(t)$$

Fazendo $t = t_0$, temos

$$0 = F'(t_0) = f_x(x_0, y_0)h'(t_0) + f_y(x_0, y_0)k'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Isto mostra que o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{r}'(t_0)$ tangente a $C$ (ver Teorema (16.37)). Entretanto, $\nabla g(x_0, y_0)$ é também ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$, porque $C$ é uma curva de nível para $g$. Como $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são ortogonais ao mesmo vetor, são paralelos, isto é, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum $\lambda$.

O número $\lambda$ no teorema precedente é chamado **multiplicador de Lagrange**.

A equação $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ no Teorema (16.42) pode escrever-se

$$f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} = \lambda g_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + \lambda g_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

Igualando as componentes $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ e considerando o vínculo $g(x, y) = 0$ somos levados ao seguinte enunciado não-vetorial do teorema de Lagrange, em que se supõe que $f$ e $g$ tenham derivadas parciais primeiras contínuas e $g_x^2 + g_y^2 \neq 0$, isto é, $g_x$ e $g_y$ não são simultaneamente nulas.

**Corolário (16.43)**

Os pontos em que uma função $f$ de duas variáveis tem extremos relativos sujeitos ao vínculo $g(x, y) = 0$ estão incluídos entre os pontos $(x, y)$, determinados pelas duas primeiras coordenadas das soluções $(x, y, \lambda)$ do sistema de equações

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ao utilizar o Corolário (16.43), primeiro achamos todas as soluções

$$(x_1, y_1, \lambda_1), (x_2, y_2, \lambda_2), (x_3, y_3, \lambda_3), \ldots$$

do sistema indicado de equações. (Às vezes há apenas *uma* solução.) Os pontos em que ocorrem os extremos relativos de $f$ estão entre

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$$

Assim, os multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ são descartados após achadas as soluções $(x_k, y_k, \lambda_k)$. Cada ponto $(x_k, y_k)$ é então estudado para determinar se $f(x_k, y_k)$ é máximo relativo, mínimo relativo ou nenhum dos dois. Há um teste complicado (provado em matemática avançada) para distinguir entre máximos e mínimos; entretanto, em geral é mais fácil utilizar considerações gráficas ou físicas para fazer a distinção. Na resolução de problemas não é costume dar provas rigorosas de que os resultados conduzam a extremos.

## EXEMPLO 1

Ache os extremos de $f(x, y) = xy$, se $(x, y)$ está restrito à elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

## SOLUÇÃO

Neste exemplo o vínculo é $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Fazendo $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ (ver (16.42)), obtemos

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda (8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$$

Assim, o sistema de equações no Corolário (16.43) é

$$\begin{cases} y = 8x\lambda \\ x = 2y\lambda \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Há muitas maneiras de achar as soluções deste sistema. Uma delas consiste em fazer $y = 8x\lambda$ em $x = 2y\lambda$, vindo

$$x = 2(8x\lambda)\lambda = 16x\lambda^2$$

Equação equivalente é

$$x - 16x\lambda^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

Portanto, ou $x = 0$ ou $\lambda = \pm \frac{1}{4}$.

Se $\lambda = \pm \frac{1}{4}$, então

$$y = 8x\lambda = 8x(\pm \tfrac{1}{4}) \quad \text{ou} \quad y = \pm 2x$$

Levando este valor de $y$ na equação $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, obtemos

$$4x^2 + (\pm 2x)^2 - 4 = 0, \; 8x^2 = 4 \text{ ou } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Os valores correspondentes de $y$ são

$$y = \pm 2x = \pm 2\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{2}$$

Desprezando os multiplicadores de Lagrange, obtemos os quatro pontos $(\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2})$.

Se $x = 0$, então, levando na equação $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, obtemos $y^2 - 4 = 0$ ou $y = \pm 2$. Assim, os pontos $(0, \pm 2)$ também podem determinar extremos de $f$.

A tabela abaixo relaciona o valor de $f$ em cada um dos pontos encontrados:

| $(x, y)$ | $(0, 2)$ | $(0, -2)$ | $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ | $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$ | $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ | $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x, y)$ | 0 | 0 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |

Assim, $f(x, y)$ toma o valor máximo 1 em $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ ou $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$ e o mínimo $-1$ em $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$ ou $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$. Tudo isto está ilustrado na elipse da Figura 16.80.

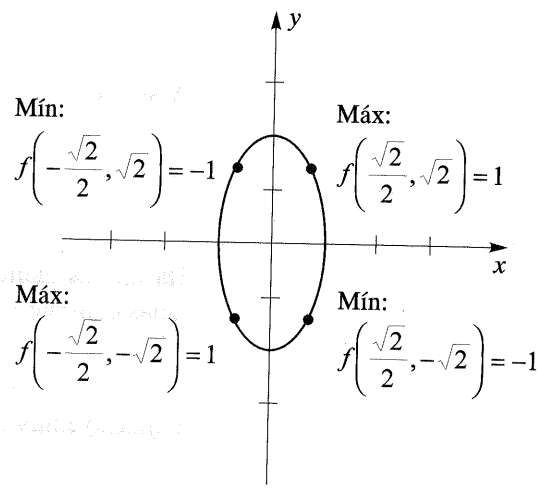



**Figura 16.80**

---

O teorema de Lagrange pode ser estendido a funções de mais de duas variáveis. O próximo resultado é uma dessas extensões. Podemos enunciar teoremas análogos para funções de um número qualquer de variáveis.

**Extensão do teorema de Lagrange (16.44)**

Sejam $f$ e $g$ funções de três variáveis dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas, e suponhamos $\nabla g \neq 0$ em toda uma região do sistema coordenado $xyz$. Se $f$ tem um extremo $f(x_0, y_0, z_0)$ sujeito ao vínculo $g(x, y, z) = 0$, então existe um número real $\lambda$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Segue-se um análogo do Corolário (16.43).

**Corolário (16.45)**

Os pontos em que uma função $f$ de três variáveis tem extremos relativos sujeitos ao vínculo $g(x, y, z) = 0$ estão incluídos entre os pontos $(x, y, z)$ determinados pelas três primeiras coordenadas das soluções $(x, y, z, \lambda)$ do sistema de equações

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

O próximo exemplo já foi rapidamente abordado no início desta seção.

## EXEMPLO 2

Ache o volume da maior caixa retangular de lados paralelos aos planos coordenados, que possa ser inscrita no elipsóide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

## SOLUÇÃO

A Figura 16.77 ilustra uma posição típica da caixa. Queremos maximizar o volume

$$V = f(x, y, z) = 8xyz$$

sujeito ao vínculo

$$g(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$$

Fazendo $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ (ver (16.44)), obtemos

$$8yz\mathbf{i} + 8xz\mathbf{j} + 8xy\mathbf{k} = \lambda(32x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 18z\mathbf{k})$$

Esta equação, juntamente com o vínculo $g(x, y, z) = 0$, dá o seguinte sistema de quatro equações (ver Corolário (16.45)):

$$\begin{cases} 8yz = 32x\lambda \\ 8xz = 8y\lambda \\ 8xy = 18z\lambda \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $x$, a segunda por $y$ e a terceira por $z$ e somando, temos

$$24xyz = 32x^2\lambda + 8y^2\lambda + 18z^2\lambda = 2\lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2)$$

Este resultado, juntamente com o vínculo $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$, implica que

$$24xyz = 2\lambda(144) \qquad \text{ou} \qquad xyz = 12\lambda$$

A última equação pode ser usada para achar $x$, $y$ e $z$. Por exemplo, multiplicando ambos os membros da equação $8yz = 32x\lambda$ por $x$ e levando em conta que $xyz = 12\lambda$, obtemos

$$\begin{aligned} 8xyz &= 32x^2\lambda \\ 8(12\lambda) &= 32x^2\lambda \\ 96\lambda - 32x^2\lambda &= 0 \\ 32\lambda(3 - x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\lambda = 0$ ou $x = \sqrt{3}$. Podemos desprezar $\lambda = 0$, pois isto conduziria a $xyz = 0$ e, então, a $V = 8xyz = 0$. Assim, a única possibilidade é $x = \sqrt{3}$.

Analogamente, multiplicando por $y$ ambos os membros da equação $8xz = 8y\lambda$ temos

$$\begin{aligned} 8xyz &= 8y^2\lambda \\ 8(12\lambda) &= 8y^2\lambda \\ 96\lambda - 8y^2\lambda &= 0 \\ 8\lambda(12 - y^2) &= 0 \end{aligned}$$

e, assim, $y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Finalmente, multiplicando por $z$ a equação $8xy = 18z\lambda$ e usando a mesma técnica, obtemos $z = 4\sqrt{3}$. Segue-se que o volume procurado é

$$V = 8xyz = 8(\sqrt{3})(2\sqrt{3})(4\sqrt{3}) = 64\sqrt{3} \approx 111$$

## EXEMPLO 3

Se $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$, ache o ponto do plano $2x + 3y + 4z = 12$ em que $f(x, y, z)$ tem seu menor valor.

## SOLUÇÃO

Examinaremos $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ sujeita ao vínculo $g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 12 = 0$. Tal como no Exemplo 2, consideramos $\nabla f(x, y, z) = \lambda g(x, y, z)$, isto é,

$$\nabla(4x^2 + y^2 + 5z^2) = \lambda\nabla(2x + 3y + 4z - 12)$$

obtendo

$$8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 10z\mathbf{k} = \lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

Igualando componentes e utilizando $g(x, y, z) = 0$, chegamos ao seguinte sistema de equações (ver Corolário (16.45)):

$$\begin{cases} 8x = 2\lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 10z = 4\lambda \\ 2x + 3y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo as três primeiras equações em relação a $\lambda$ obtemos

$$\lambda = 4x = \tfrac{2}{3}y = \tfrac{5}{2}z$$

Estas condições implicam

$$y = 6x \quad \text{e} \quad z = \tfrac{8}{5}x$$

Levando à equação de vínculo $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, obtemos

$$2x + 18x + \tfrac{32}{5}x - 12 = 0$$

ou $x = \frac{5}{11}$. Logo, $y = 6(\frac{5}{11}) = \frac{30}{11}$ e $z = (\frac{8}{5})(\frac{5}{11}) = \frac{8}{11}$. Como há apenas um ponto crítico, segue-se que o mínimo ocorre nesse ponto, $(\frac{5}{11}, \frac{30}{11}, \frac{8}{11})$.

---

Algumas aplicações podem envolver mais de um vínculo. Em particular, consideremos o problema de achar os extremos de $f(x, y, z)$ sujeitos aos *dois* vínculos

$$g(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad h(x, y, z) = 0$$

Se $f$ tem um extremo sujeito a esses vínculos, então a condição seguinte deve ser satisfeita para números reais $\lambda$ e $\mu$:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda\nabla g(x, y, z) + \mu\nabla h(x, y, z)$$

Igualando componentes e levando em consideração os vínculos, obtemos um sistema de cinco equações com cinco incógnitas $x$, $y$, $z$, $\lambda$ e $\mu$. O próximo exemplo é uma ilustração desta situação.

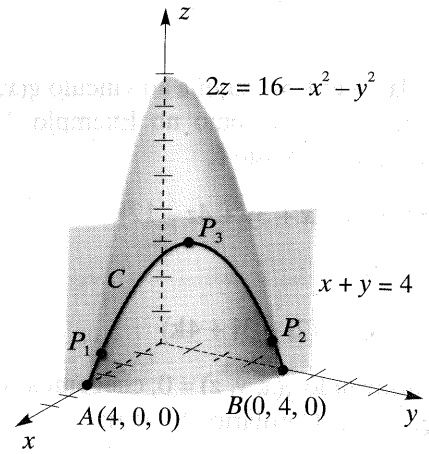



**Figura 16.81**

Este método pode também ser estendido a funções de mais de três variáveis e a mais de dois vínculos.

## EXEMPLO 4

Denotemos por $C$ o arco, no primeiro octante, da curva em que o paraboloide $2z = 16 - x^2 - y^2$ e o plano $x + y = 4$ se interceptam. Ache os pontos de $C$ mais próximos e mais afastados da origem. Ache as distâncias mínima e máxima da origem a $C$.

## SOLUÇÃO

A Figura 16.81 é um esboço da curva $C$. Se $P(x, y, z)$ é um ponto arbitrário de $C$, então queremos determinar o maior e o menor valor de $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Podemos obter esses valores determinando os ternos $(x, y, z)$ que dão os extremos do radicando

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeito aos dois vínculos

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$$

$$h(x, y, z) = x + y - 4 = 0$$

Conforme discussão que precede este exemplo, consideremos

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda\nabla(x^2 + y^2 + 2z - 16) + \mu\nabla(x + y - 4)$$

Assim,

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$= (2x\lambda + \mu)\mathbf{i} + (2y\lambda + \mu)\mathbf{j} + (2\lambda)\mathbf{k}$$

Igualando componentes e considerando os dois vínculos, chegamos ao seguinte sistema de cinco equações

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda + \mu \\ 2y = 2y\lambda + \mu \\ 2z = 2\lambda \\ x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos as equações equivalentes

$$2x - 2y = (2x\lambda + \mu) - (2y\lambda + \mu) = 2x\lambda - 2y\lambda$$

$$2(x - y) - 2\lambda(x - y) = 0$$

$$2(x - y)(1 - \lambda) = 0$$

Conseqüentemente, ou $\lambda = 1$ ou $x = y$.

Se $\lambda = 1$, temos $2z = 2\lambda = 2(1)$ ou $z = 1$. O primeiro vínculo, ou seja, $x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$, então dá $x^2 + y^2 - 14 = 0$. Resolvendo esta equação simultaneamente com $x + y - 4 = 0$, temos que

$$x = 2 + \sqrt{3}, y = 2 - \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 2 - \sqrt{3}, \ y = 2 + \sqrt{3}$$

Assim, os pontos de $C$ que podem originar extremos são

$$P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1) \text{ e } P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)$$

As distâncias de $O$ correspondentes são

$$d(O, P_1) = \sqrt{15} = d(O, P_2)$$

Se $x = y$, então, pelo vínculo $x + y - 4 = 0$, obtemos as equações equivalentes $x + x - 4 = 0$, $2x = 4$, ou $x = 2$, o que dá $P_3(2, 2, 4)$ e $d(O, P_3) = 2\sqrt{6}$.

Referindo-nos à Figura 16.81, podemos agora fazer as seguintes observações. Quando um ponto se move continuamente ao longo de $C$ de $A(4, 0, 0)$ até $B(0, 4, 0)$, sua distância à origem começa em $d(O, A) = 4$, decresce até o mínimo de $\sqrt{15}$ em $P_1$ e cresce até o máximo de $2\sqrt{6}$ em $P_3$. A distância passa então a diminuir até $\sqrt{15}$ em $P_2$ e cresce novamente até 4 em $B$.

Como verificação da solução, note que as equações paramétricas de $C$ são

$$x = 4 - t, y = t, z = 4t - t^2; 0 \le t \le 4$$

Neste caso

$$f(x, y, z) = (4 - t)^2 + t^2 + (4t - t^2)^2,$$

e é possível achar os extremos de $f$ utilizando métodos de uma variável. Obtêm-se os mesmos pontos. (Verifique!)

## EXERCÍCIOS 16.9

**Exercs. 1-10:** Use os multiplicadores de Lagrange para achar os extremos de $f$ sujeitos aos vínculos indicados.

**1** $f(x, y) = y^2 - 4xy + 4x^2$; $x^2 + y^2 = 1$

**2** $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2 + y$; $2x + 3y = 1$

**3** $f(x, y, z) = x + y + z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

**4** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 25$

**5** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y + z = 1$

**6** $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$; $z = 4x^2 + y^2$

**7** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
$x - y = 1$, $y^2 - z^2 = 1$

**8** $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$;
$x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$

**9** $f(x, y, z, t) = xyzt$; $x - z = 2$,
$y^2 + t = 4$

**10** $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$;
$3x + 4y = 5$, $z + t = 2$

**11** Ache o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ mais próximo do ponto (2, 3, 4).

**12** Ache o ponto da intersecção dos planos $x + 3y - 2z = 11$ e $2x - y + z = 3$ mais próximo da origem.

**13** Deve-se construir uma caixa retangular fechada de 2 m$^3$ de volume. Se o custo por metro quadrado do material para os lados, o fundo e a tampa é \$ 200,00, \$ 400,00 e \$ 300,00, respectivamente, ache as dimensões que minimizam o custo.

**14** Prove que o paralelepípedo de volume dado e área de superfície mínima é o cubo.

**15** Ache o volume da maior caixa retangular que tem três de seus vértices sobre os eixos $x$, $y$ e $z$ positivos, e um quarto vértice no plano $2x + 3y + 4z = 12$.

**16** Ache as dimensões da caixa retangular de volume máximo, que tem três de suas faces nos planos coordenados, um vértice na origem e outro vértice no primeiro octante no plano $2x + 3y + 5z = 90$.

**17** Deve-se construir um depósito com tampa, em forma de cilindro circular reto e com área de superfície fixa. Ache as dimensões que maximizem o volume.

**18** Ache as dimensões da caixa retangular de volume máximo, faces paralelas aos planos coordenados, que pode ser inscrita no elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.

**19** Prove que o triângulo de área máxima e perímetro dado $p$ é eqüilátero. (*Sugestão:* Se os lados são $x$, $y$ e $z$, e se $s = \frac{1}{2}p$, então a área $A$ é dada pela fórmula de Heron, $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$.)

**20** Prove que o produto dos senos dos ângulos de um triângulo é máximo quando o triângulo é eqüilátero.

**21** A resistência de uma viga retangular varia como o produto de sua largura pelo quadrado de sua profundidade. Ache as dimensões da viga de maior resistência que pode ser cortada de um toro cilíndrico cujas secções transversas são elípticas, com eixos maior e menor de 24 cm e 16 cm, respectivamente.

**22** Se $x$ unidades de capital e $y$ unidades de trabalho são necessárias para fabricar $f(x, y)$ unidades de certo artigo, a *função de produção de Cobb-Douglas* é definida por $f(x, y) = kx^a y^b$, em que $k$ é uma constante e $a$ e $b$ são números positivos tais que $a + b = 1$. Suponha que $f(x, y) = x^{1/5}y^{4/5}$ e que cada unidade de capital custe $C$ cruzeiros e cada unidade de trabalho custe $L$ cruzeiros. Se o total disponível para esses custos é $M$ cruzeiros, de modo que $xC + yL = M$, quantas unidades de capital e unidades de trabalho maximizarão a produção?

**Exercs. 23-24:** Use os multiplicadores de Lagrange e gráficos para estimar os extremos de $f(x, y)$ sujeitos ao vínculo $g(x, y) = 0$.

**23** $f(x, y) = y - \cos x + 2x$; $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$

**24** $f(x, y) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}y^3$; $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

## 16.10 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

**Exercs. 1-4:** Descreva o domínio de $f$ e a curva ou superfície de nível por $P$.

**1** $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 + 9y^2}$; $P(3, 4)$

**2** $f(x, y) = \ln xy$; $P(2, 3)$

**3** $f(x, y, z) = (z^2 - x^2 - y^2)^{-3/2}$; $P(0, 0, 1)$

**4** $f(x, y, z) = \dfrac{\sec z}{x - y}$; $P(5, 3, 0)$

**Exercs. 5-8:** Ache o limite ou mostre que ele não existe.

**5** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy + 5}{y^2 + 4}$

**6** $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{z^2 + z - 2}{xyz + 2xy}$

**7** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$

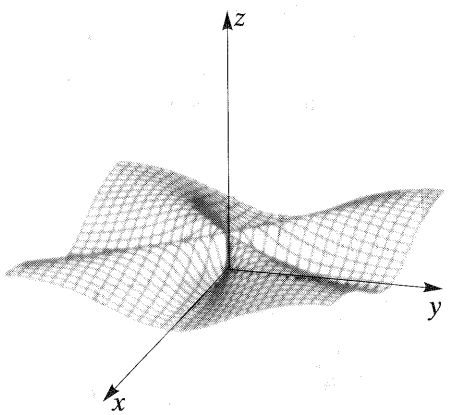
**8** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + 2y^4}$

**9** Use coordenadas polares para descrever as curvas de nível de

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

e investigue $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

**10** O gráfico de $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)^2$ exibido na figura indica que $f$ tem derivadas parciais primeiras em $(0, 0)$ mas não é contínua ali. Verifique.




**Exercs. 11-16:** Ache as derivadas parciais primeiras de $f$.

**11** $f(x, y) = x^3 \cos y - y^2 + 4x$

**12** $f(r, s) = r^2e^{rs}$

**13** $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{y^2 + z^2}$

**14** $f(u, v, t) = u \ln \dfrac{v}{t}$

**15** $f(x, y, z, t) = x^2z\sqrt{2y + t}$

**16** $f(v, w) = v^2 \cos w + w^2 \cos v$

**Exercs. 17-18:** Ache as derivadas parciais segundas de $f$.

**17** $f(x, y) = x^3y^2 - 3xy^3 + x^4 - 3y + 2$

**18** $f(x, y, z) = x^2e^{y^2 - z^2}$

**19** Se $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, prove que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

**20** Ache $dw$ se

(a) $w = y^3 \operatorname{arctg} x^2 + 2x - y$ (b) $w = x^2 \operatorname{sen} yz$

**21** (a) Ache $\Delta w$ e $dw$ se $w = x^2 + 3xy - y^2$.

(b) Se $(x, y)$ varia de $(-1, 2)$ a $(-1{,}1; 2{,}1)$, use $\Delta w$ para achar a variação exata de $w$, e use $dw$ para achar a variação aproximada de $w$.

**22** Suponha que, ao aplicar a lei de Ohm, haja erros percentuais de $\pm 3\%$ e $\pm 2\%$ nas medidas de $V$ e $I$, respectivamente. Por meio de diferenciais, estime o erro percentual máximo no valor calculado de $R$.

**Exercs. 23-24:** Prove que $f$ é diferenciável em todo o domínio.

**23** $f(x, y) = \dfrac{xy}{y^2 - x^2}$

**24** $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x - y}$

**Exercs. 25-27:** Use a regra da cadeia.

**25** Ache $\partial s/\partial x$ e $\partial s/\partial y$ se $s = uv + vw - uw$, $u = 2x + 3y$, $v = 4x - y$ e $w = -x + 2y$.

**26** Ache $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$ se $z = ye^x$, $x = r + st$, e $y = 2r + 3s - t$.

**27** Ache $dw/dt$ se $w = x \operatorname{sen} yz$, $x = 3e^{-t}$, $y = t^2$ e $z = 3t$.

**28** Por meio de derivadas parciais, ache $dy/dx$ se $y = f(x)$ é definida implicitamente por

$$x^3 - 4xy^3 - 3y + x - 2 = 0$$

**29** Ache $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z = f(x, y)$ é definida implicitamente por

$$x^2y + z\cos y - xz^3 = 0$$

**30** (a) Ache a derivada direcional da função $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 5xy$ em $P(2, -1)$ na direção de $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

(b) Ache a taxa máxima de crescimento de $f(x, y)$ em $P$.

**31** Suponha que a temperatura no ponto $(x, y, z)$ seja dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - 4z$.

(a) Ache a taxa instantânea de variação de $T$ no ponto $P(-1, -3, 2)$ na direção de $P$ para o ponto $Q(-4, 1, -2)$.

(b) Ache a taxa máxima de variação de $T$ em $P$.

**32** Um *modelo de densidade urbana* é uma fórmula que relaciona a densidade populacional (número de pessoas por quilômetro quadrado) e a distância do centro da cidade. Suponha introduzido um sistema retangular de coordenadas com o centro da cidade na origem, e seja $Q(x, y)$ a densidade populacional nas proximidades de ponto $P(x, y)$. Decida a direção em que a densidade populacional cresce mais rapidamente em $P(x, y)$ para a função de densidade $Q$ dada, em que $a$, $b$ e $c$ são constantes positivas.

(a) $Q(x, y) = ae^{-b\sqrt{x^2 + y^2}}$

(b) $Q(x, y) = ae^{-b\sqrt{x^2 + y^2}} + c(x^2 + y^2)$

**33** Escreva as equações do plano tangente e da normal a $7z = 4x^2 - 2y^2$ em $P(-2, -1, 2)$.

**34** Uma curva $C$ tem parametrização $x = t$, $y = t$ e $z = t^3$; $t$ em $\mathbb{R}$. Se $f(x, y, z) = y^2 + xz$ e $\boldsymbol{u}$ é um vetor unitário tangente a $C$ em $P(2, 4, 8)$, ache $D_{\mathbf{u}}f(2, 4, 8)$.

**35** Mostre que todo plano tangente ao cone

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

passa pela origem.

**36** Se $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}y^2$, trace a curva de nível de $f$ que contém $P(0, 5)$; esboce $\nabla f]_P$.

**37** Se $F(x, y, z) = z + 4x^2 + 9y^2$, esboce a superfície de nível de $F$ que contém $P(1, 0, 0)$ e $\nabla F]_P$.

**Exercs. 38-39:** Ache os extremos de $f$.

**38** $f(x, y) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} - xy$

**39** $f(x, y) = x^2 + 3y - y^3$

**40** O material da base de um depósito retangular custa o dobro do preço do material para os lados e a tampa. Para um volume fixo, ache as dimensões relativas que minimizem o custo.

**Exercs. 41-42:** Use os multiplicadores de Lagrange para achar os extremos de $f$ sujeitos aos vínculos indicados.

**41** $f(x, y, z) = xyz$; $\quad x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 8$

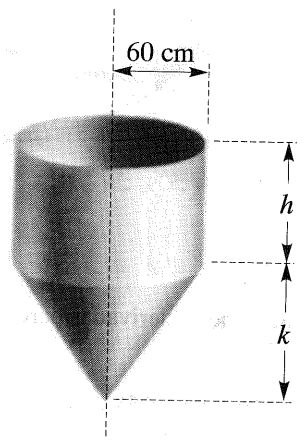
**42** $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$;
$2x - y + z = 4$, $x + 2y - z = 1$

**43** Ache o ponto do parabolóide

$$z = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4}$$

mais próximo do ponto $(0, 5, 0)$.

**44** A tremonha de um elevador de grãos tem a forma de um cone circular reto de 60 cm de raio com um cilindro circular reto superposto, conforme figura. Se o volume *total* é de 27 m$^3$, ache as alturas $h$ e $k$ do cilindro e do cone, respectivamente, que minimizem a área da superfície curva.



**45** Um processador sob forma de conduto (*pipeline processor*) em um supercomputador é como uma linha de montagem destinada a executar um grande número de operações aritméticas similares em estágios. Uma vez cheio, o processador executará uma operação aritmética em cada período de relógio. Tais processadores têm em geral menos de 10 estágios. A *razão P desempenho-custo* para um desses processadores é dada por

$$P = \frac{s}{(T + sk_0)(C + sk_1)}$$

em que $s$ é o número de estágios, $T$ é o tempo necessário para efetuar a operação em um computador sem *pipeline*, $C$ é o custo total da *pipeline* e $k_0$ e $k_1$ são constantes que dependem do equipamento (*hardware*) usado. Para o planejamento ótimo, $\partial P/\partial s = 0$.

Determine o número de estágios nesse planejamento ótimo.

**46** Uma placa delgada de metal com a forma de uma lâmina quadrada com vértices em um plano coordenado nos pontos (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1) tem cada uma de suas bordas imersas em gelo a 0°C. A temperatura inicial $T$ em $P(x, y)$ é dada por $T = 20 \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y$.

(a) Ache o ponto em que a temperatura inicial é máxima.

(b) Se $U(x, y, t)$ é a temperatura em $P(x, y)$ no instante $t$, pode-se mostrar que $U$ satisfaz a equação bidimensional do calor

$$\frac{\partial U}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$$

em que $k$ é uma constante que depende da condutividade térmica e do calor específico da placa. Mostre que

$$U(x, y, t) = 20e^{-2k\pi^2 t} \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y$$

é uma solução desta equação do calor.

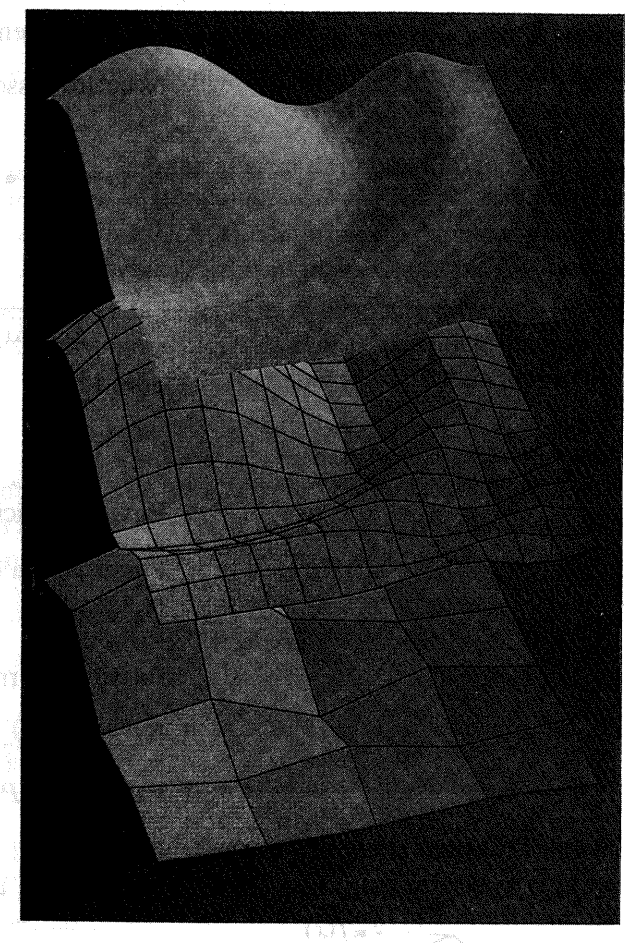
(c) Descreva a temperatura da placa em um longo período de tempo.

MAKRON Books

# Capítulo 17

# INTEGRAIS MÚLTIPLAS

## INTRODUÇÃO



Definem-se as *integrais múltiplas* por meio de funções de diversas variáveis e limites de somas de modo análogo ao do caso da integral definida $\int_a^b f(x)\ dx$ no Capítulo 5. A diferença principal reside no fato de que, em lugar de começarmos com uma partição do intervalo $[a, b]$, subdividimos uma região $R$ do plano-$xy$ ou um sistema coordenado $xyz$. Os teoremas de cálculo se baseiam em equações de curvas e superfícies que constituem a fronteira de $R$, sendo, pois, mais complicados que o teorema fundamental do cálculo para integrais definidas.

As integrais múltiplas permitem-nos considerar aplicações que envolvem sólidos e superfícies *não-homogêneos* mais gerais do que os obtidos pela revolução de uma região plana ou uma curva em torno de uma reta. Em particular, podemos agora achar momentos e centros de gravidade de sólidos de forma irregular em que a densidade não é constante – algo que até aqui não dispúnhamos de recursos para fazer.

Nas Seções 17.7 e 17.8 definimos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas em três dimensões. Tais sistemas são úteis no estudo de propriedades de sólidos determinados por superfícies quádricas – especialmente cilindros, esferas e cones.

Encerramos o capítulo introduzindo o conceito de *jacobiano* e aplicando-o ao problema de mudança de variáveis nas integrais múltiplas.

## 17.1 INTEGRAIS DUPLAS

No Capítulo 5, definimos a integral definida $\int_a^b f(x)\ dx$ de uma função $f$ de uma variável. Podemos também considerar integrais de funções de diversas variáveis, chamadas *integrais duplas*, *integrais tríplices*, *integrais de superfície* e *integrais curvilíneas*. Cada integral é definida de maneira análoga. A principal diferença está no domínio do integrando.

Lembremos que $\int_a^b f(x)\ dx$ pode ser definida aplicando-se os quatro passos seguintes. (A Figura 17.1 ilustra os Passos 1 e 2.)

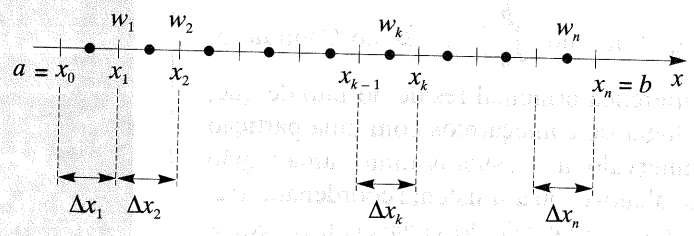



**Figura 17.1**

**Passo 1** Particionar $[a, b]$ escolhendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

**Passo 2** Para cada $k$, escolher um número wk no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

**Passo 3** Formar a soma de Riemann $\sum_k f(w_k)\ \Delta x_k$, com $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

**Passo 4** Se $\|P\|$ é a norma da partição (o maior $\Delta x_k$), então

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(w_k)\ \Delta x_k.$$

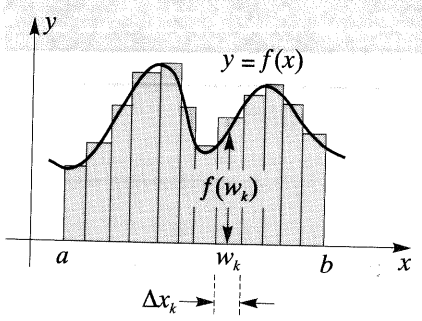



**Figura 17.2**

Se $f$ é não-negativa em $[a, b]$, então a soma de Riemann do Passo 3 é uma soma de áreas de retângulos do tipo ilustrado na Figura 17.2. Esta soma tende para a área da região sob o gráfico de $f$ de $x = a$ a $x = b$. Se existe o limite da soma de Riemann quando $\|P\| \to 0$ (Passo 4), obtemos a integral definida $\int_a^b f(x)\ dx$, cujo valor é a área (exata) sob o gráfico.

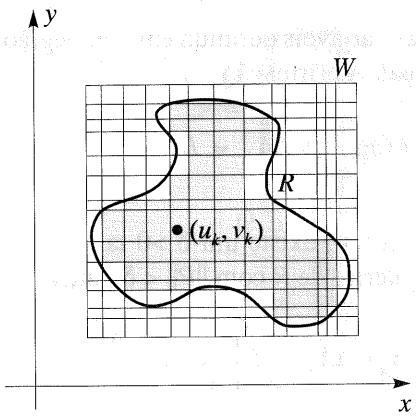



**Figura 17.3** Partição interior de $R$.

Consideremos agora uma função $f$ de *duas* variáveis tal que $f(x, y)$ exista em toda uma região $R$ do plano-$xy$. Definiremos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ por meio de um processo de quatro passos análogo ao utilizado para $\int_a^b f(x)\, dx$. Em todo este capítulo, $R$ denotará uma região que pode ser subdividida em um número finito de regiões $R_x$ e $R_y$, tais como definidas na Seção 6.1. Toda região $R$ desse tipo está contida em uma região retangular $W$. Se $W$ é dividida em retângulos por meio de uma rede de retas horizontais e verticais, então a coleção de todas as sub-regiões fechadas retangulares que estão completamente *dentro* de $R$ constituirão uma **partição interior** $P$ de $R$. (Este particionamento corresponde ao Passo 1 do processo de quatro passos).

As regiões retangulares cinzas da Figura 17.3 ilustram uma partição interior de $R$. Rotulando-as $R_1, R_2, \ldots, R_n$, esta partição interior se denota por $\{R_k\}$. O comprimento da maior diagonal de todas as $R_k$ é a **norma $\|P\|$ da partição**. O símbolo $\Delta A_k$ denota a área de $R_k$. Para cada $k$ escolhemos um ponto arbitrário $(u_k, v_k)$ em $R_k$, conforme Figura 17.3 (A escolha deste ponto corresponde ao Passo 2.) As somas de Riemann (Passo 3) são definidas a seguir.

**Definição (17.1)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis definida em uma região $R$, e seja $P = \{R_k\}$ uma partição interior de $R$. Uma **soma de Riemann** de $f$ para $P$ é qualquer soma da forma

$$\sum_k f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$$

em que $(u_k, v_k)$ é um ponto de $R_k$ e $\Delta A_k$ é a área de $R_k$. A somatória se estende a todas as sub-regiões $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de $P$.

Finalmente, consideremos um limite de somas de Riemann quando $\|P\| \to 0$ (Passo 4). Pode-se mostrar que, se $f$ é contínua em $R$, as somas de Riemann da Definição (17.1) tendem para um número real $L$ quando $\|P\| \to 0$, independentemente da escolha dos pontos $(u_k, v_k)$ nas sub-regiões $R_k$. O número $L$ é a **integral dupla** $\iint_R f(x, y)\, dA$. Segue-se uma definição matematicamente precisa de um limite de somas de Riemann.

**Definição (17.2)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis definida em uma região $R$, e seja $L$ um número real. A afirmação

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta A_k = L$$

significa que, para todo $\in > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $P = \{R_k\}$ é uma partição interior de $R$ com $\|P\| < \delta$, então

$$\left| \sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta A_k - L \right| < \in$$

para toda escolha de $(u_k, v_k)$ em $R_k$.

A Definição (17.2) afirma que *podemos tornar toda soma de Riemann tão próxima de L quanto quisermos, escolhendo uma partição interior com norma $\|P\|$ suficientemente pequena.*

Pode-se definir como a seguir a integral dupla de $f$.

**Definição (17.3)**

Seja $f$ uma função de duas variáveis definida em uma região $R$. A **integral dupla de *f* sobre *R***, denotada por $\iint_R f(x, y)\, dA$, é

$$\iint_R f(x, y)\ dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta A_k,$$

desde que o limite exista.

Se a integral dupla de $f$ sobre $R$ existe, então dizemos que $f$ é **integrável sobre *R***. Prova-se em textos mais avançados que, se $f$ é contínua em $R$, então $f$ é integrável sobre $R$.

Há uma interpretação geométrica útil das somas de Riemann e da integral dupla se $f$ é contínua e $f(x, y) \geq 0$ em toda a $R$. Denotemos por $S$ o gráfico de $f$ e por $Q$ o sólido situado abaixo de $S$ e sobre $R$, conforme Figura 17.4. Se $P_k(u_k, v_k, 0)$ é um ponto na sub-região $R_k$ de uma partição interior $P$ de $R$, então $f(u_k, v_k)$ é a distância do plano-$xy$ ao ponto $B_k$ em $S$, diretamente acima de $P_k$. O produto $f(u_k, v_k)\ \Delta A_k$ é o volume do prisma de base retangular de área $\Delta A_k$ ilustrado na Figura 17.4. A soma de todos esses volumes de prismas (ver Figura 17.5) é uma aproximação do volume $V$ de $Q$. Como esta aproximação do volume melhora ao tender $\|P\|$ para zero, definimos $V$ como o limite de somas dos números $f(u_k, v_k)\ \Delta A_k$. Aplicando (17.3), obtemos:

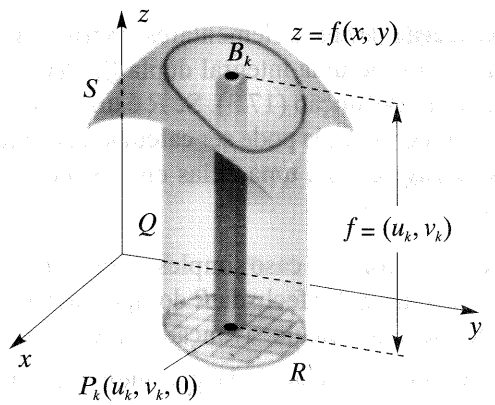



Figura 17.4

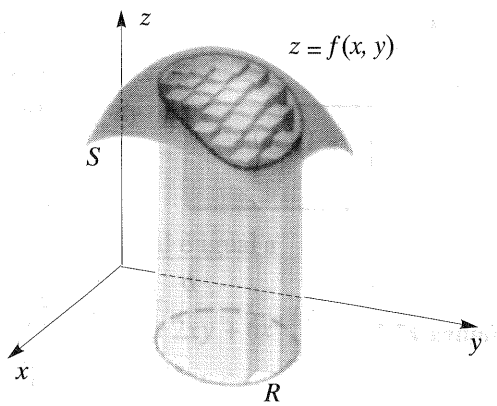



Figura 17.5

**Definição (17.4)**

Seja $f$ uma função contínua de duas variáveis tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y)$ em uma região $R$. O volume $V$ do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de $R$ é

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Se $f(x, y) \leq 0$ em toda $R$, a integral dupla de $f$ sobre $R$ é o *negativo* do volume do sólido situado *acima* do gráfico de $f$ e *sob* a região $R$.

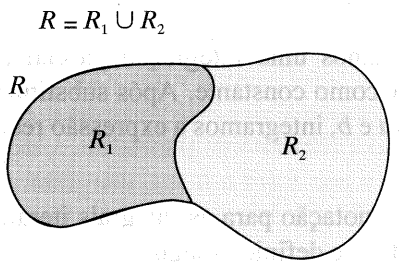



Figura 17.6

No próximo teorema relacionamos, sem demonstrar, algumas propriedades das integrais duplas que correspondem às do Capítulo 5 para integrais definidas. Supõem-se todas as regiões e funções restringidas convenientemente, para que as integrais indicadas existam. A expressão *não-superpostas*, em (iii) do teorema, significa que as regiões $R_1$ e $R_2$ têm no máximo apenas pontos-fronteira em comum, conforme se vê na Figura 17.6.

**Teorema (17.5)**

**(i)** $\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA$ para todo real $c$

**(ii)** $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$

**(iii)** Se $R$ é a união de duas regiões não-superpostas $R_1$ e $R_2$,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

**(iv)** Se $f(x, y) \geq 0$ em toda a $R$, então $\iint_R f(x, y)\, dA \geq 0$.

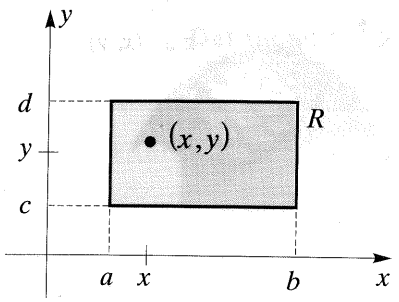



**Figura 17.7**

Com exceção de casos elementares, é virtualmente impossível achar o valor de uma integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ diretamente a partir da Definição (17.3). Se $R$ é uma região $R_x$ ou $R_y$, entretanto, a integral dupla pode ser calculada por meio de duas integrais sucessivas, cada uma delas envolvendo apenas uma variável independente.

Comecemos com um caso simples – uma função $f$ contínua em uma região retangular fechada $R$ do tipo ilustrado na Figura 17.7. Mostra-se em cálculo avançado que a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ pode ser calculada por meio de uma **integral iterada** do tipo abaixo:

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x,\ y)\ dy \right] dx$$

Conforme indicado pelos colchetes, primeiro efetuamos uma **integração parcial** *em relação a y*, considerando $x$ como constante. Substituindo $y$ pelos limites de integração $c$ e $d$ da maneira usual, obtemos uma expressão em $x$, que é integrada de $a$ a $b$. Pode-se também usar a seguinte integral iterada:

$$\int_c^d \left[ \int_a^b f(x,\ y)\ dx \right] dy$$

Neste caso, primeiro efetuamos uma integração parcial em relação a $x$, considerando $y$ como constante. Após substituir $x$ pelos limites de integração $a$ e $b$, integramos a expressão resultante em $y$ de $c$ a $d$.

Costuma-se abreviar a notação para as integrais iteradas omitindo os colchetes, conforme definição seguinte.

**Definição (17.6)**

**(i)** $$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

**(ii)** $$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

Note que a *primeira* diferencial à *direita* do integrando $f(x, y)$ em (17.6) especifica a variável da *primeira* integração parcial. O primeiro sinal de integral à *esquerda* de $f(x, y)$ indica os limites de integração para aquela variável. Assim, ao calcular uma integral iterada, trabalhamos primeiro com a integral mais interna.

**EXEMPLO 1**

Calcule $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\, dy\, dx$.

**SOLUÇÃO**

Pela Definição (17.6)(i), a integral é igual a

$$\int_1^4 \left[ \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\, dy \right] dx = \int_1^4 \left[ 2xy + 6x^2 \left( \frac{y^2}{2} \right) \right]_{-1}^2 dx$$

$$= \int_1^4 [(4x + 12x^2) - (-2x + 3x^2)]\, dx$$

$$= \int_1^4 (6x + 9x^2)\, dx$$

$$= \left[ 3x^2 + 3x^3 \right]_1^4 = 234$$

**EXEMPLO 2**

Calcule $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y)\, dx\, dy$.

**SOLUÇÃO**

Pela Definição (17.6)(ii), a integral é igual a

$$\int_{-1}^2 \left[ \int_1^4 (2x + 6x^2y)\, dx \right] dy = \int_{-1}^2 \left[ 2\left( \frac{x^2}{2} \right) + 6\left( \frac{x^3}{3} \right) y \right]_1^4 dy$$

$$= \int_{-1}^2 [(16 + 128y) - (1 + 2y)]\, dy$$

$$= \int_{-1}^2 (126y + 15)\, dy$$

$$= \left[ 63y^2 + 15y \right]_{-1}^2 = 234$$

O fato de as integrais iteradas nos Exemplos 1 e 2 serem iguais não é acidental. Se $f$ é contínua, então as duas integrais iteradas em (17.6) são *sempre* iguais. Dizemos que *a ordem de integração é irrelevante*.

Pode-se definir como a seguir uma integral dupla iterada sobre uma região $R_x$ ou $R_y$ do tipo exibido na Figura 17.8.

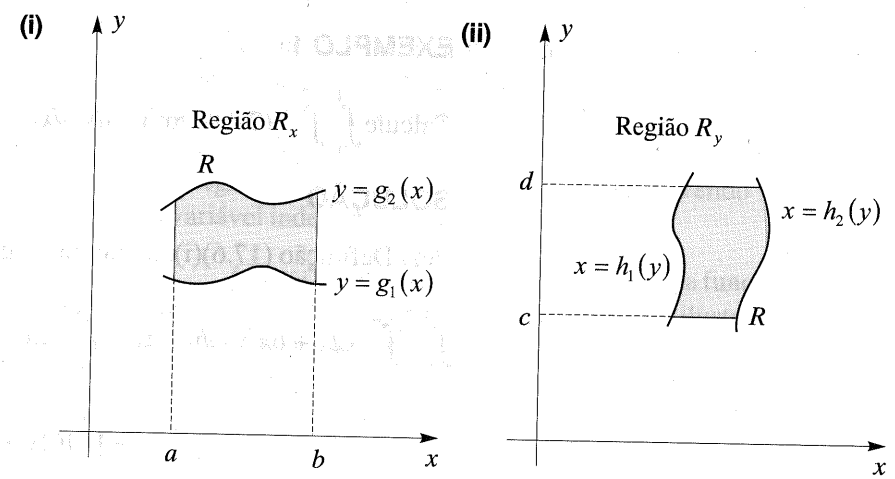



**Figura 17.8**

**Definição de integrais iteradas (17.7)**

$$\text{(i)}\quad \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$\text{(ii)}\quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Na Definição (17.7), primeiro efetuamos uma integração parcial em relação a $y$, e então substituímos $y$ por $g_2(x)$ e $g_1(x)$ na maneira usual. Integramos então a expressão resultante em $x$ de $a$ a $b$. Em (ii) da definição, primeiro integramos em relação a $x$ e então, após substituir $x$ por $h_2(y)$ e $h_1(y)$, integramos a expressão resultante em relação a $y$ de $c$ a $d$. Assim, como na Definição (17.6) para regiões retangulares, trabalhamos primeiro com a integral *mais interna.*

## EXEMPLO 3

Calcule $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\,dy\,dx$.

## SOLUÇÃO

Pela Definição (17.7)(i) a integral é igual a

$$\int_0^2 \left[ \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\,dy \right] dx = \int_0^2 \left[ x^3 y + 4\left(\frac{y^2}{2}\right) \right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 [(2x^4 + 8x^2) - (x^5 + 2x^4)]\,dx$$

$$= \left[ \frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 \right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

**EXEMPLO 4**

Calcule $\int_1^3 \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos x \, dx \, dy$.

**SOLUÇÃO**

Pela Definição (17.7)(ii), a integral é igual a

$$\int_1^3 \left[ \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos x \, dx \right] dy = \int_1^3 2y \left[ \operatorname{sen} x \right]_{\pi/6}^{y^2} dy$$

$$= \int_1^3 2y \left(\operatorname{sen} y^2 - \tfrac{1}{2}\right) dy$$

$$= \int_1^3 (2y \operatorname{sen} y^2 - y) \, dy$$

$$= \left[ -\cos y^2 - \tfrac{1}{2} y^2 \right]_1^3$$

$$= \left(-\cos 9 - \tfrac{9}{2}\right) - \left(-\cos 1 - \tfrac{1}{2}\right) \approx -2{,}55$$

O próximo teorema afirma que se a região $R$ é uma região $R_x$ ou $R_y$ então $\iint_R f(x, y) \, dA$ pode ser calculada por meio de uma integral iterada.

**Teorema para o cálculo de integrais duplas (17.8)**

**(i)** Seja $R$ a região $R_x$ da Figura 17.8(i). Se $f$ é contínua em $R$, então

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

**(ii)** Seja $R$ a região $R_y$ da Figura 17.8(ii). Se $f$ é contínua em $R$, então

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

Para regiões mais complicadas, dividimos $R$ em sub-regiões $R_x$ ou $R_y$, aplicamos (17.8) a cada uma e somamos os valores das integrais resultantes.

Em textos de cálculo avançado pode-se encontrar a demonstração do Teorema (17.8). A exposição intuitiva seguinte torna plausível o resultado, ao menos para funções com valores não-negativos. Suponhamos $f(x, y) \geq 0$ em toda a região $R_x$ ilustrada na Figura 17.8(i). Sejam $S$ o gráfico de $f$, $Q$ o sólido sob $S$ e sobre $R$ e $V$ o volume de $Q$. Consideremos o plano que

é paralelo ao plano-$yz$ e intercepta o eixo-$x$ em $(x, 0, 0)$, com $a \leq x \leq b$, e seja $C$ o traço de $S$ neste plano (ver Figura 17.9). Este plano intercepta as fronteiras de $R - y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ – em $P_1(x, g_1(x), 0)$ e $P_2(x, g_2(x), 0)$.

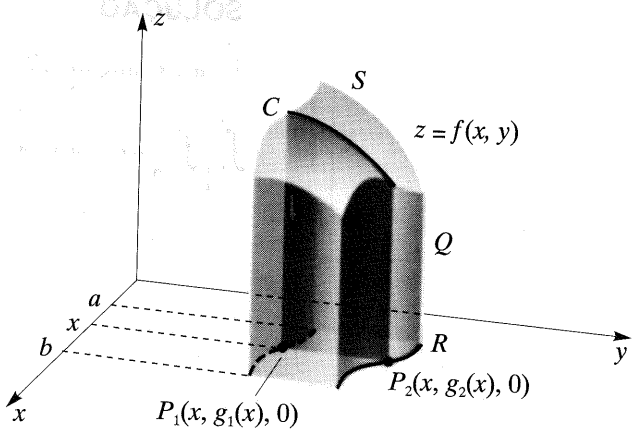



**Figura 17.9**

Pelo Capítulo 6, sabemos que a área $A(x)$ desta porção do plano é

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Como $A(x)$ é a área de uma secção transversa típica de $Q$, segue-se de (6.13) que

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

Levando em conta que $V$ também é dado pela Definição (17.4), obtemos a fórmula de cálculo da parte (i) do Teorema (17.8). Discussão análoga vale para a parte (ii).

Antes de aplicar o Teorema (17.8) para calcular uma integral dupla, *é importante fazer um esboço da região R* e determinar suas fronteiras. Os exemplos seguintes ilustram a aplicação do Teorema (17.8).

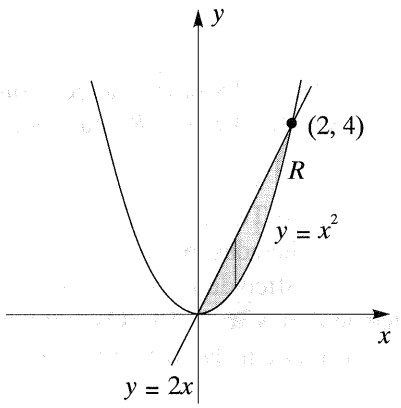



Figura 17.10

## EXEMPLO 5

Seja $R$ a região do plano-$xy$ delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$. Calcule $\iint_R (x^3 + 4y)\, dA$ aplicando

**(a)** o Teorema (17.8)(i) **(b)** o Teorema 17.8(ii)

## SOLUÇÃO

**(a)** A Figura 17.10 exibe a região $R$. Note que $R$ é tanto uma região $R_x$ como uma região $R_y$. Encaramos $R$ como uma região $R_x$ com fronteira inferior $y = x^2$ e fronteira superior $y = 2x$, com $0 \le x \le 2$. Traçamos um segmento vertical entre essas duas fronteiras para indicar que a primeira integração é em relação a $y$ (da fronteira inferior à fronteira superior). Pelo Teorema (17.8)(i),

$$\iint_R (x^3 + 4y)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\, dy\, dx$$

Pelo Exemplo 3, sabemos que a última integral é igual a $\frac{32}{3}$.

**(b)** Para aplicar o Teorema (17.8)(ii), encaramos $R$ como uma região $R_y$ e resolvemos cada uma das equações dadas em relação a $x$ em termos de $y$, obtendo

$$x = \tfrac{1}{2}y \quad \text{e} \quad x = \sqrt{y}, \quad 0 \le y \le 4$$

O segmento horizontal da Figura 17.11 se estende da fronteira esquerda à fronteira direita, indicando que a primeira integração é em relação a $x$. Pelo Teorema (17.8)(ii),

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^3 + 4y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \left[ \tfrac{1}{4}x^4 + 4yx \right]_{y/2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left[ \left( \tfrac{1}{4}y^2 + 4y^{3/2} \right) - \left( \tfrac{1}{64}y^4 + 2y^2 \right) \right] dy = \frac{32}{3}$$

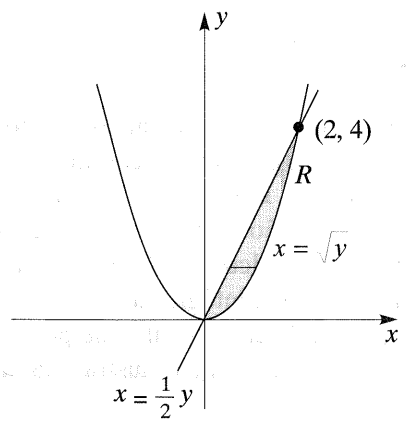



Figura 17.11

## EXEMPLO 6

Seja $R$ a região delimitada pelos gráficos das equações $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x - 18}$ e $y = 0$. Se $f$ é uma função contínua arbitrária em $R$, expresse a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ em termos de integrais iteradas utilizando apenas

**(a)** o Teorema (17.8)(i) **(b)** o Teorema (17.8)(ii)

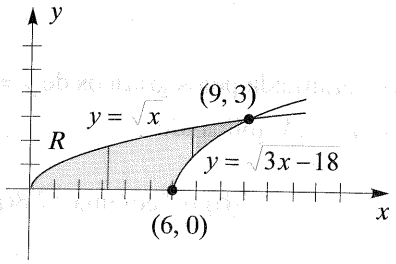



**Figura 17.12**

## SOLUÇÃO

Os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{3x - 18}$ são as metades superiores das parábolas $y^2 = x$ e $y^2 = 3x - 18$. A região $R$ está esboçada nas Figuras 17.12 e 17.13.

**(a)** Se quisermos utilizar apenas o Teorema 17.8(i), então é necessário empregar duas integrais iteradas, porque, se $0 \le x \le 6$, a fronteira inferior da região é o gráfico de $y = 0$, e se $6 \le x \le 9$, a fronteira inferior é o gráfico de $y = \sqrt{3x - 18}$. (Os segmentos verticais na Figura 17.12 se estendem da fronteira inferior à fronteira superior de $R$.)

Se $R_1$ denota a parte da região $R$ compreendida entre $x = 0$ e $x = 6$ e se $R_2$ denota a parte entre $x = 6$ e $x = 9$, então tanto $R_1$ como $R_2$ são regiões $R_x$. Logo

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx + \int_6^9 \int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$$

**(b)** Para aplicar o Teorema (17.8)(ii), devemos resolver em relação a $x$ cada uma das equações dadas em termos de $y$, obtendo

$$x = y^2 \quad \text{e} \quad x = \frac{y^2 + 18}{3} = \frac{1}{3}y^2 + 6, \quad 0 \le y \le 3$$

O segmento horizontal da Figura 17.13 se estende da fronteira esquerda à fronteira direita. Neste caso, é suficiente apenas uma integral iterada, pois $R$ é uma região $R_y$. Assim,

$$\iint_R f(x, y)\, dA \int_0^3 \int_{y^2}^{(y^2/3)+6} f(x, y)\, dx\, dy$$

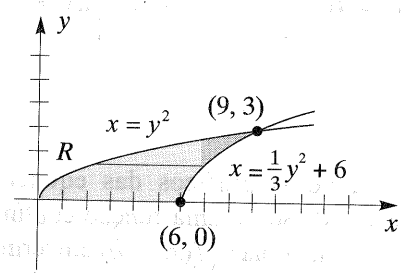



**Figura 17.13**

Os exemplos 5 e 6 mostram como certas integrais duplas podem ser calculadas, seja por (i) ou por (ii) do Teorema (17.8). Geralmente, a escolha da ordem de integração $dydx$ ou $dxdy$ depende da forma de $f(x, y)$ e da região $R$. Às vezes, é extremamente difícil, ou mesmo impossível, calcular uma integral dupla iterada. Todavia, invertendo a ordem de integração de $dydx$ para $dxdy$, chega-se a uma integral dupla equivalente que pode ser calculada com facilidade. O próximo exemplo ilustra esta técnica.

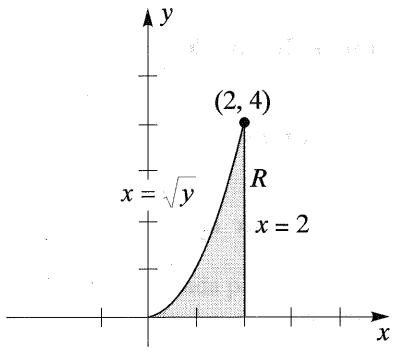



**Figura 17.14**

## EXEMPLO 7

Dada $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dx \, dy$, inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

## SOLUÇÃO

A ordem de integração dada, $dxdy$, indica que se trata de uma região $R_y$. Conforme Figura 17.14, as fronteiras esquerda e direita são os gráficos de $x = \sqrt{y}$ e $x = 2$, respectivamente com $0 \le y \le 4$.

Note que $R$ é também uma região $R_x$ cujas fronteiras inferior e superior são dadas por $y = 0$ e $y = x^2$, respectivamente, com $0 \le x \le 2$. Logo, pelo Teorema (17.8)(i), a integral pode ser calculada como a seguir:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dx \, dy = \iint_R y \cos x^5 \, dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} y \cos x^5 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \left[ \frac{y^2}{2} \cos x^5 \right]_0^{x^2} dx = \int_0^2 \frac{x^4}{2} \cos x^5 \, dx$$

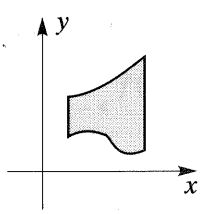
$$= \frac{1}{10} \int_0^2 (\cos x^5)(5x^4) \, dx$$

$$= \frac{1}{10} \left[ \operatorname{sen} x^5 \right]_0^2 = \frac{1}{10} \operatorname{sen} 32 \approx 0{,}055$$

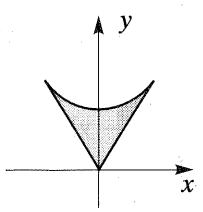
## EXERCÍCIOS 17.1

**Exercs. 1-10:** Determine se a região é $R_x$, $R_y$ ou nenhum dos dois tipos.

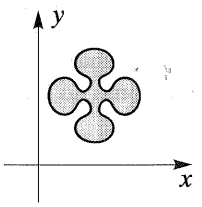
**1**



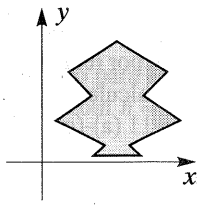

**2**



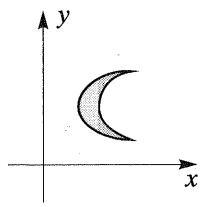

**5**



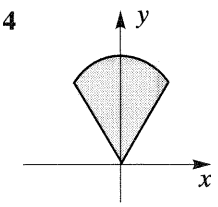

**6**



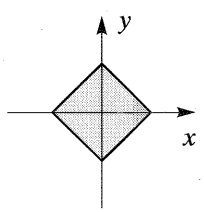

**3**



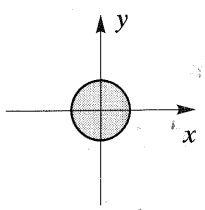

**4**



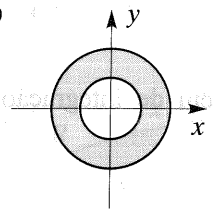

**7**



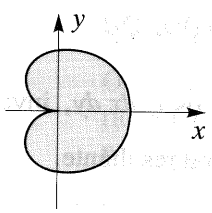

**8**



**9**




**10**

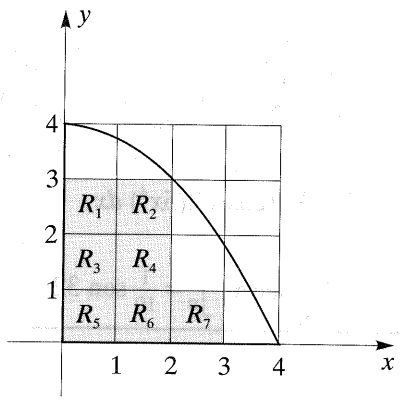



**11** Sejam $f(x, y) = 4x + 2y + 1$ e $R$ a região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenados e pelo gráfico de $y = 4 - \frac{1}{4}x^2$. Seja $\{R_k\}$, $k = 1, 2, ..., 7$, a partição interior de $R$ exibida na figura. Calcule a soma de Riemann $\sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta A_k$ se, para cada $k$, $(u_k, v_k)$ é o ponto

(a) no canto esquerdo inferior de $R_k$

(b) no canto direito superior de $R_k$

(c) no centro de $R_k$




**12** Sejam $f(x, y) = xy$ e $R$ a região delimitada pelo trapezóide de vértices (0, 0), (4, 4), (8, 4) e (12, 0). Seja $P$ a partição interior de $R$ determinada por retas verticais com interceptos-$x$ 0, 2, 4, 6, 8, 10 e 12 e por retas horizontais com interceptos-$y$ 0, 2 e 4. Calcule as somas de Riemann como no Exercício 11 (a)-(c).

**Exercs. 13-20:** Calcule a integral iterada.

**13** $\int_1^2 \int_{-1}^2 (12xy^2 - 8x^3)\, dy\, dx$

**14** $\int_0^3 \int_{-2}^{-1} (4xy^3 + y)\, dx\, dy$

**15** $\int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y\, dy\, dx$

**16** $\int_{-1}^1 \int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y)\, dy\, dx$

**17** $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y)\, dx\, dy$

**18** $\int_0^1 \int_{-y-1}^{y-1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

**19** $\int_1^2 \int_{x^3}^{x} e^{y/x}\, dy\, dx$

**20** $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} (x \cos y - y \cos x)\, dy\, dx$

**Exercs. 21-26:** Esboce a região $R$ delimitada pelos gráficos das equações dadas. Se $f(x, y)$ é uma função contínua arbitrária, expresse $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral iterada, usando (a) somente o Teorema (17.8)(i) e (b) somente o Teorema (17.8)(ii).

**21** $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$

**22** $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$

**23** $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$

**24** $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$

**25** $y = \sqrt{x}$, $x = x^3$

**26** $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$

**Exercs. 27-32:** Expresse a integral dupla, sobre a região $R$ indicada, como uma integral iterada, e ache seu valor.

**27** $\iint_R (y + 2x)\, dA$;

a região retangular de vértices (– 1, – 1), (2, – 1), (2, 4), (– 1, 4).

**28** $\iint_R (x - y)\, dA$;

a região triangular de vértices (2, 9), (2, 1), (– 2, 1).

**29** $\iint_R xy^2\, dA$;

a região triangular de vértices (0, 0), (3, 1) e (– 2, 1).

**30** $\iint_R (y + 1)\, dA$;

a região entre os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ de $x = 0$ a $x = \pi/4$.

**31** $\iint_R x^3 \cos xy\, dA$;

a região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 2$

**32** $\iint_R e^{x/y}\, dA$;

a região delimitada pelos gráficos de $y = 2x$, $y = -x$ e $y = 4$

**Exercs. 33-38:** Esboce a região $R$ delimitada pelos gráficos das equações dadas. Se $f$ é uma função contínua arbitrária em $R$, expresse $\iint_R f(x, y)\, dA$ como soma de duas integrais iteradas do tipo usado em (a) Teorema (17.8)(i) e (b) Teorema (17.8)(ii).

**33** $8y = x^3$, $y - x = 4$, $4x + y = 9$

**34** $x = 2\sqrt{y}$, $\sqrt{3}\, x = \sqrt{y}$, $y = 2x + 5$

**35** $x = \sqrt{3 - y}$, $y = 2x$, $x + y + 3 = 0$

**36** $x + 2y = 5$, $x - y = 2$, $2x + y = -2$

**37** $y = e^x$, $y = \ln x$, $x + y = 1$, $x + y = 1 + e$

**38** $y = \operatorname{sen} x$, $\pi y = 2x$

**Exercs. 39-44:** Esboce a região de integração para a integral iterada.

**39** $\int_{-1}^{2} \int_{-\sqrt{4 - x^2}}^{4 - x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

**40** $\int_{-1}^{2} \int_{x^2 - 4}^{x - 2} f(x, y)\, dy\, dx$

**41** $\int_{0}^{1} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\, dx\, dy$

**42** $\int_{-2}^{-1} \int_{3y}^{2y} f(x, y)\, dx\, dy$

**43** $\int_{-3}^{1} \int_{\operatorname{arctg} x}^{e^x} f(x, y)\, dy\, dx$

**44** $\int_{\pi}^{2\pi} \int_{\operatorname{sen} y}^{\ln y} f(x, y)\, dx\, dy$

**Exercs. 45-50:** Inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

**45** $\int_0^1 \int_{2x}^{2} e^{(y^2)}\, dy\, dx$ **46** $\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^{3} \operatorname{sen} x^3\, dx\, dy$

**47** $\int_0^2 \int_{y^2}^{4} y \cos x^2\, dx\, dy$ **48** $\int_1^e \int_0^{\ln x} y\, dy\, dx$

**49** $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}}\, dx\, dy$

**50** $\int_0^2 \int_x^2 y^4 \cos(xy^2)\, dy\, dx$

**Exercs. 51-52:** Pode-se usar a integração numérica para aproximar $\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$ fazendo primeiro $G(y) = \int_c^d f(x, y)\, dx$ e aplicando então a regra do trapézio ou a regra de Simpson a $\int_a^b G(y)\, dy$. Para achar cada valor $G(k)$ necessário para essas regras, aproxime $\int_c^d f(x, k)\, dx$. Use este método e a regra do trapézio com $n = 3$ para aproximar a integral dada.

**51** $\int_0^1 \int_0^1 e^{x^2 y^2}\, dx\, dy$

**52** $\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2 + y^3)\, dx\, dy$

**Exercs. 53-54:** Use o método descrito para os Exercícios 51-52 e a regra de Simpson com $n = 2$, para aproximar a integral dupla.

**53** $\int_0^1 \int_0^1 \cos(x^2 e^y)\, dx\, dy$

**54** $\int_0^1 \int_{-1/3}^{1/3} \frac{1}{1 + x^4 + y^4}\, dx\, dy$

## 17.2 ÁREA E VOLUME

Na Seção 17.1 vimos que se $f(x, y) \geq 0$ e se $f$ é contínua, então o volume $V$ do sólido compreendido sob o gráfico de $z = f(x, y)$ e sobre uma região $R_x$ do plano-$xy$ é dado por

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

em que $A(x)$ é a área de uma secção transversa típica do sólido (ver Figura 17.9). Nesta seção estudaremos um método para interpretar esta fórmula de $V$ como um limite de somas (duplas). Pela fórmula "volume por secções transversas" (6.13),

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k A(u_k)\, \Delta x_k$$

em que $P'$ é uma partição do intervalo $[a, b]$, $u_k$ é um número arbitrário no $k$.mo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $P'$ e $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. De acordo com a Figura 17.15, $A(u_k)\, \Delta x_k$ é o volume de uma lâmina $L_k$ com face paralela ao plano-$yz$ e base retangular de largura $\Delta x_k$ no plano-$xy$. Assim, *o volume $V$ é o limite de uma soma de volumes de tais lâminas.*

A integral iterada $V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ pode expressar-se também em termos de limites de somas. Primeiro aplicamos a definição de integral definida como a seguir. Se $x$ está em $[a, b]$, então

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy = \lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(x, v_j)\, \Delta y_j$$

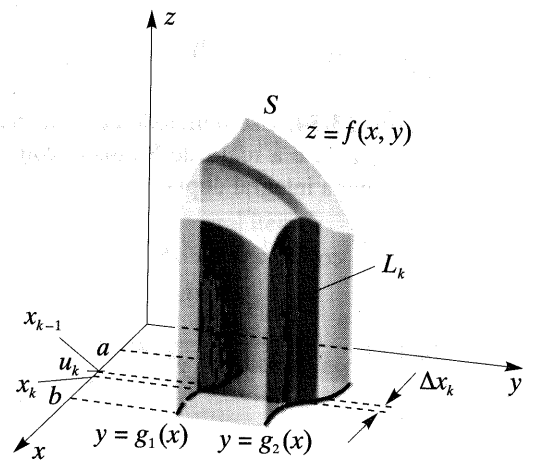



**Figura 17.15**

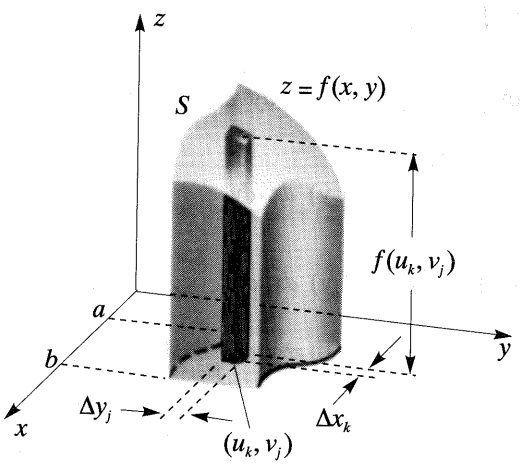



**Figura 17.16**

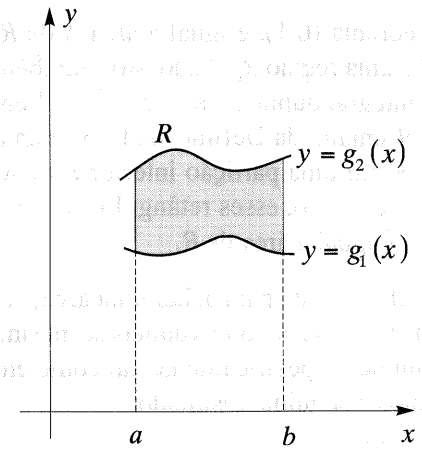



**Figura 17.17**

em que $P''$ é uma partição do intervalo-$y$ $[g_1(x), g_2(x)]$, $v_j$ é um número arbitrário no $j^{\text{mo}}$ subintervalo $[y_{j-1}, y_j]$ de $P''$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Logo, para cada $u_k$ em $[a, b]$,

$$A(u_k) = \lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j$$

Conseqüentemente,

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k A(u_k)\, \Delta x_k$$

$$= \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k \left[ \lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j \right] \Delta x_k$$

Desconsiderando os limites nesta fórmula, obtemos uma **soma dupla**

$$\sum_k \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k$$

Referindo-nos à Figura 17.16, vemos que $f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k$ é o volume de um prisma de área de base $\Delta y_j\, \Delta x_k$ e altura $f(u_k, v_j)$. A soma dupla pode ser interpretada como a seguir. *Mantendo x fixo*, somamos os volumes dos prismas na direção do eixo-$y$, obtendo assim o volume da lâmina ilustrada na Figura 17.15. Os volumes de todas essas lâminas são então somados na direção do eixo-$x$. Em certo sentido, a integral iterada faz isto e, ao mesmo tempo, toma limites quando as bases dos prismas tendem para pontos. Esta interpretação costuma ser útil para visualizar aplicações da integral dupla. Para enfatizar este ponto de vista, por vezes expressamos o volume como segue, em que $\|P\|$ é o comprimento da maior diagonal das bases do prisma.

**Volume como limite de somas duplas (17.9)**

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

As áreas também podem ser consideradas limites de somas duplas. Começamos denotando a integral dupla $\iint_R 1\, dA$ por $\iint_R dA$. Se $R$ é a região $R_x$ na Figura 17.17, então, pelo Teorema (17.8)(i),

$$\iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\, dy\, dx = \int_a^b \Big[ y \Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

o que, de acordo com o Teorema (6.1), é igual à área $A$ de $R$. Fórmula análoga vale se $R$ é uma região $R_y$. Tudo isto é também evidente pela definição de integral dupla, pois, se $f(x, y) = 1$ em toda a $R$, então a soma de Riemann da Definição (17.3) é uma soma de áreas de retângulos em uma partição interior $P$ de $R$. Quando a norma $\|P\|$ tende para zero, esses retângulos cobrem mais e mais de $R$, e o limite é igual à área de $R$.

Se se utiliza uma integral iterada para achar uma área, ela pode ser considerada como um limite de somas duplas da mesma maneira que no caso de volume. Especificamente, tal como em (17.9), com $f(x, y) = 1$, temos o seguinte resultado.

**Área como limite de somas duplas (17.10)**

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \sum_j \Delta y_j\, \Delta x_k$$

Tal como para funções de uma variável (ver Diretrizes (6.3)), podemos empregar o seguinte método *intuitivo* para memorizar a fórmula (17.10) do limite de somas.

**Diretrizes para achar a área de uma região $R_x$ por meio de uma integral dupla (17.11)**

**1** Esboçar a região, conforme Figura 17.18(i) e exibir um retângulo típico de dimensões $dx$ e $dy$.

**2** *Mantendo x fixo*, encarar $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}$ como um operador que soma os elementos de área $dydx$ na mesma direção do eixo-$y$, da fronteira inferior para a fronteira superior. A expressão $\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\right] dx$ representa a área do retângulo vertical da Figura 17.18(ii).

**3** Aplicar o operador $\int_a^b$ a $\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\right] dx$, o que equivale a tomar um limite de somas de áreas dos retângulos verticais na Diretriz 2, de $x = a$ a $x = b$.

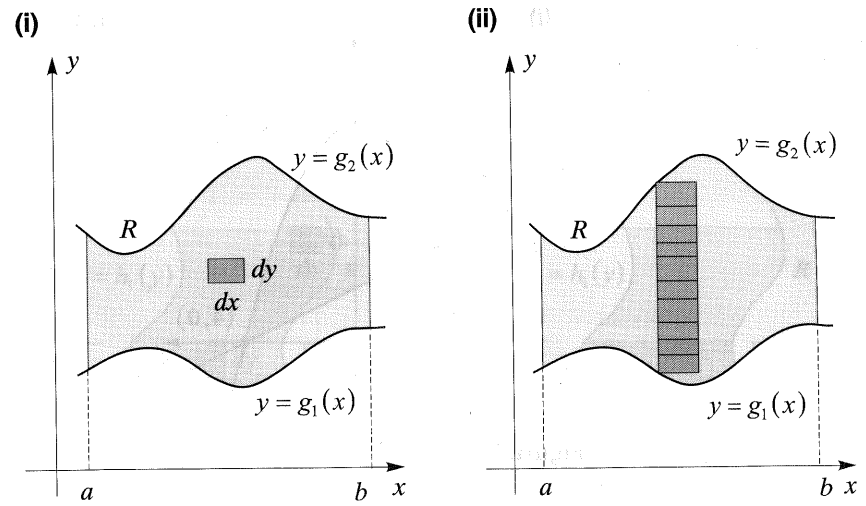



**Figura 17.18**

É importante lembrar que, ao aplicarmos as Diretrizes (17.11) a uma região $R_x$, a primeira integração é em relação a $y$ e a segunda em relação a $x$. Podemos, naturalmente, obter a área da região da Figura 17.18 pelos métodos da Seção 6.1. A razão para utilizarmos uma integral dupla é adquirir prática em lidar com limites de somas duplas. Esta mesma técnica será empregada em problemas que não podem ser resolvidos por métodos de uma variável.

## EXEMPLO 1

Ache a área $A$ da região do plano-$xy$ delimitada pelos gráficos de $2y = 16 - x^2$ e $x + 2y = 4$.

## SOLUÇÃO

Seguindo a diretriz 1, esboçamos a região e um retângulo típico de área $dydx$, conforme Figura 17.19(i). Resolvemos as equações em relação a $y$ em termos de $x$ e rotulamos as fronteiras da região $y = 2 - \frac{1}{2}x$ e $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$.

Tal como na diretriz 2, a integração parcial

$$\int_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dy\ dx = \left[\int_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dy\right] dx$$

representa a soma dos elementos de área $dydx$ da fronteira inferior até a fronteira superior. Isto nos dá a área do retângulo vertical na Figura 17.19 (ii).

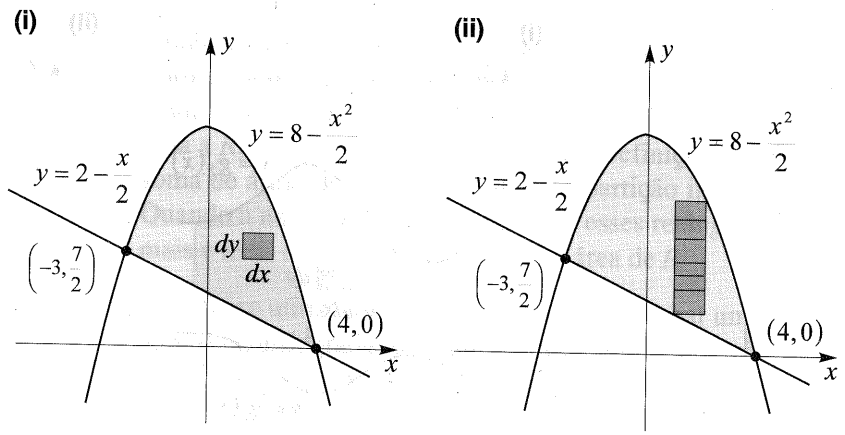



**Figura 17.19**

Finalmente, utilizando a diretriz 3, aplicamos o operador $\int_{-3}^{4}$, o que equivale a tomar um limite de somas desses retângulos verticais de $x = -3$ a $x = 4$:

$$A = \int_{-3}^{4} \int_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dy\, dx = \int_{-3}^{4} \left[ y \right]_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dx$$

$$= \int_{-3}^{4} \left[ \left(8 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{x}{2}\right) \right] dx$$

$$= \left[ 6x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right]_{-3}^{4} = \frac{343}{12} \approx 28{,}6$$

Damos a seguir, para regiões $R_y$, diretrizes análogas a (17.11).

**Diretrizes para achar a área de uma região $R_y$ por meio de uma integral dupla (17.12)**

**1** Esboçar a região, como na Figura 17.20(i), e exibir um retângulo típico de dimensões *dx* e *dy*.

**2** *Mantendo y fixo*, encarar $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}$ como um operador que soma os elementos de área *dxdy* na direção do eixo-*x*, da fronteira esquerda para a fronteira direita. A expressão $\left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right] dy$ representa a área do retângulo horizontal na Figura 17.20(ii).

**3** Aplicar o operador $\int_c^d$ a $\left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right] dy$, o que equivale a tomar um limite de somas de áreas dos retângulos horizontais na diretriz 2, de $y = c$ a $y = d$.

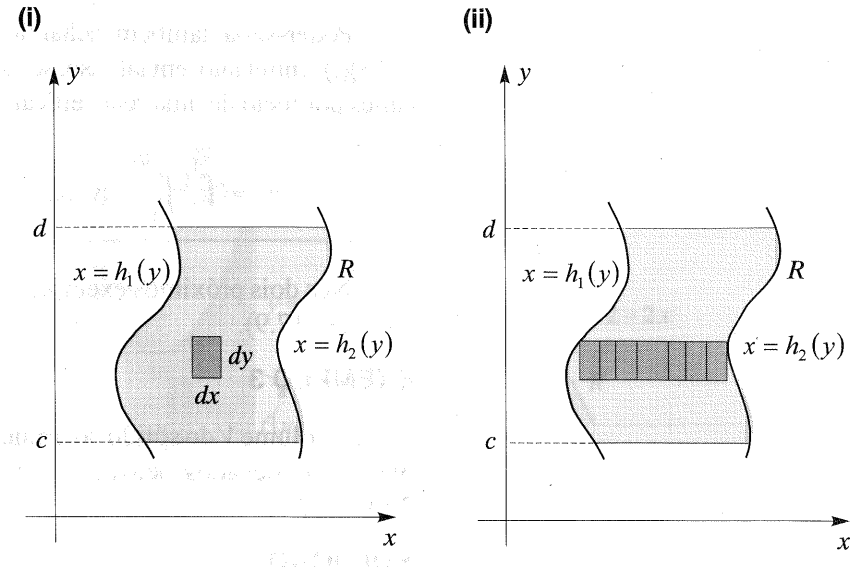



**Figura 17.20**

Note que, ao aplicar as Diretrizes (17.12) a uma região $R_y$, a primeira integração é em relação a $x$ e a segunda em relação a $y$.

## EXEMPLO 2

Ache a área $A$ da região do plano-$xy$ delimitada pelos gráficos de $x = y^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.21(i) é um esboço da região, juntamente com um retângulo de área $dxdy$. Tal como na Diretriz 2 de (17.12), a integração parcial

$$\int_{y^3}^{2-y} dx\ dy = \left[\int_{y^3}^{2-y}\right] dy$$

representa a soma de elementos de área $dxdy$ da fronteira esquerda para a fronteira direita. Isto nos dá a área do retângulo horizontal da Figura 17.21(ii).

De acordo com a diretriz 3, aplicamos o operador $\int_0^1$, o que equivale a tomar um limite de somas desses retângulos horizontais de $y = 0$ a $y = 1$:

$$A = \iint_R dA = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx\ dy = \int_0^1 \left[x\right]_{y^3}^{2-y} dy$$

$$= \int_0^1 (2 - y - y^3)\, dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

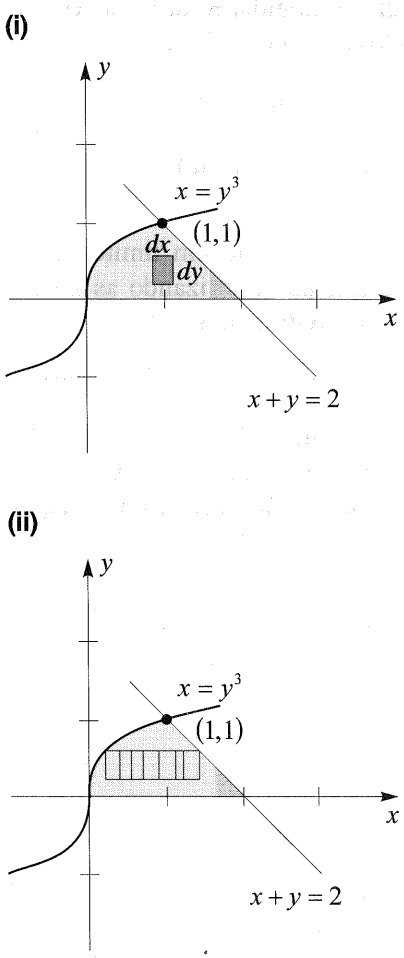



**Figura 17.21**

Poder-se-ia também achar a área aplicando o Teorema (17.8)(i); entretanto, em tal caso, seria necessário dividir $R$ em duas partes por meio de uma reta vertical por (1, 1). Teríamos então

$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy\ dx$$

Nos dois próximos exemplos vamos calcular volumes por meio de (17.9).

## EXEMPLO 3

Ache o volume $V$ do sólido do primeiro octante delimitado pelos planos coordenados, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 + 1$ e pelo plano $2x + y = 2$.

## SOLUÇÃO

De acordo com a Figura 17.22(i), o sólido está abaixo do parabolóide e acima da região triangular $R$ do plano-$xy$ delimitada pelos eixos coordenados e a reta $y = 2 - 2x$.

Pela Definição (17.4), com $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$,

$$V = \iint_R (x^2 + y^2 + 1)\ dA$$

Podemos interpretar esta integral como um limite de somas duplas, como em (17.9), e calculá-la utilizando as Diretrizes (17.11). Representando $dA$ por $dydx$, então

$$(x^2 + y^2 + 1)\ dy\ dx$$

representa o volume do prisma ilustrado na Figura 17.22(i). A Figura 17.22(ii) mostra a região $R$ do plano-$xy$ e um retângulo correspondente à seguinte integração parcial em relação a $y$ (mantendo-se $x$ fixo):

$$\int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + 1)\ dy\ dx = \left[ \int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + 1)\ dy \right] dx$$

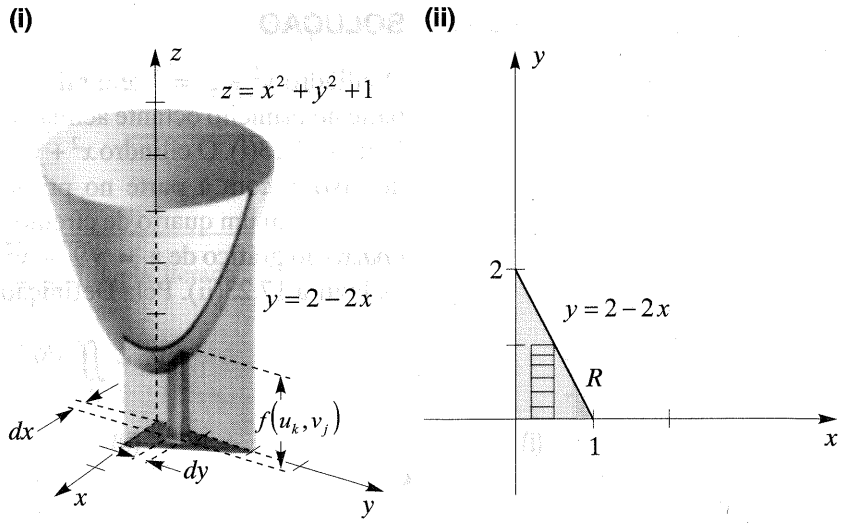



**Figura 17.22**

Esta fórmula representa a soma de volumes de prismas $(x^2 + y^2 + 1)\, dy\, dx$ *na direção paralela ao eixo-y* e dá o volume de uma lâmina cuja face é paralela ao plano-*yz*. Finalmente, aplicamos o operador $\int_0^1$, isto é, tomamos um limite de somas desses volumes laminares de $x = 0$ a $x = 1$. Assim,

$$V = \int_0^1 \left[ \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1)\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[ x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 + y \right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\tfrac{14}{3} x^3 + 10x^2 - 10x + \tfrac{14}{3}\right) dx$$

$$= \left[ -\tfrac{7}{6} x^4 + \tfrac{10}{3} x^3 - 5x^2 + \tfrac{14}{3} x \right]_0^1 = \tfrac{11}{6}$$

Podemos também achar $V$ integrando primeiro em relação a $x$; a integral iterada toma então a forma

$$V = \int_0^2 \int_0^{(2-y)/2} (x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy$$

---

## EXEMPLO 4

Ache o volume $V$ do sólido que está no primeiro octante e é delimitado pelos três planos coordenados e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 9$ e $y^2 + z^2 = 9$.

## SOLUÇÃO

O cilindro $y^2 + z^2 = 9$ tem raio 3 e eixo sobre o eixo-$x$, com a parte no primeiro octante acima do plano-$xy$, conforme se vê na Figura 17.23(i). O cilindro $x^2 + y^2 = 9$ tem raio 3 e eixo ao longo do eixo-$z$, com a parte no primeiro octante interceptando o plano-$xy$ em um quarto de círculo. Assim, o sólido está situado *abaixo* do gráfico de $z = \sqrt{9 - y^2}$ e *acima* da região $R$ exibida na Figura 17.23(ii). Pela Definição (17.4),

$$V = \iint_R \sqrt{9 - y^2}\, dA$$

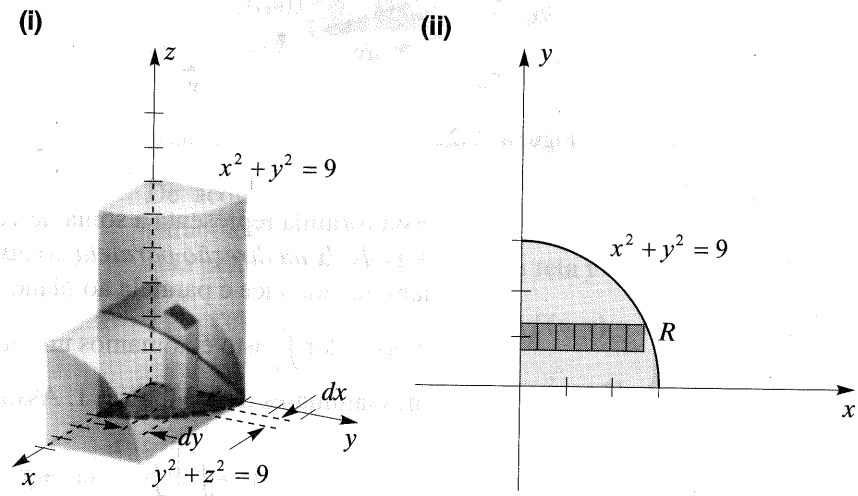



**Figura 17.23**

Podemos considerar a integral como um limite de somas duplas de volume de prismas do tipo exibido na Figura 17.23(i). Primeiro somamos na direção do eixo-$x$ de $x = 0$ a $x = \sqrt{9 - y^2}$. (A Figura 17.23(ii) mostra uma faixa no plano-xy correspondente a esta primeira somação). Esta soma nos dá o volume de uma lâmina cuja face é paralela ao plano-$xz$. Somamos então estes volumes laminares na direção do eixo-$y$ de $y = 0$ a $y = 3$. Utilizando uma integral iterada, temos

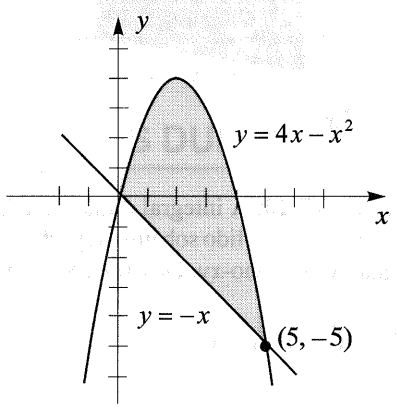
$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9 - y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^3 \sqrt{9 - y^2} \left[x\right]_0^{\sqrt{9-y^2}} dy \\ &= \int_0^3 (9 - y^2)\, dy \\ &= \left[9y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^3 = 18 \end{aligned}$$

Poderíamos também calcular a integral dupla integrando primeiro em relação a $y$; todavia, esta ordem de integração é muito mais complicada.

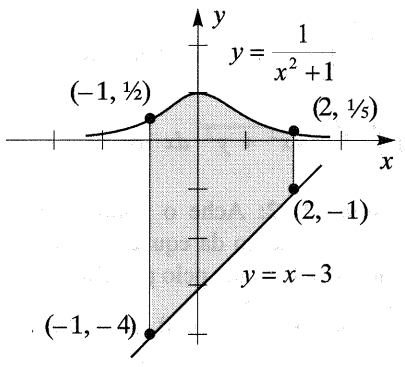
## EXERCÍCIOS 17.2

**Exercs. 1-4:** Estabeleça uma integral dupla iterada para achar a área da região.

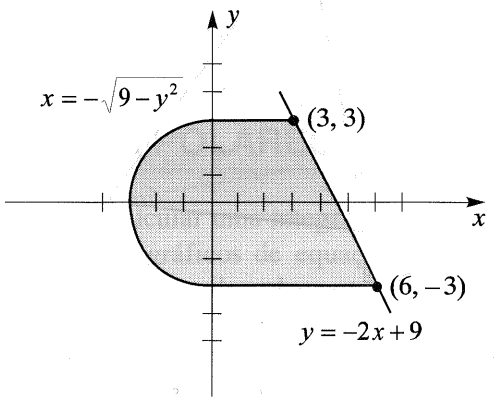
**1**



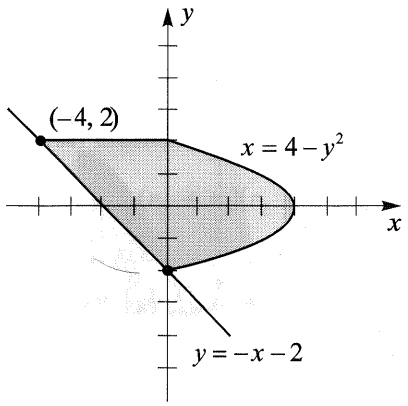

**2**




**3**




**4**




**Exercs. 5-12:** Esboce a região delimitada pelos gráficos das equações e ache sua área utilizando uma ou mais integrais duplas.

**5** $y = 1/x^2$, $y = -x^2$, $x = 1$, $x = 2$

**6** $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$, $x = 4$

**7** $y^2 = -x$, $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$

**8** $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$, $y = 3$

**9** $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$

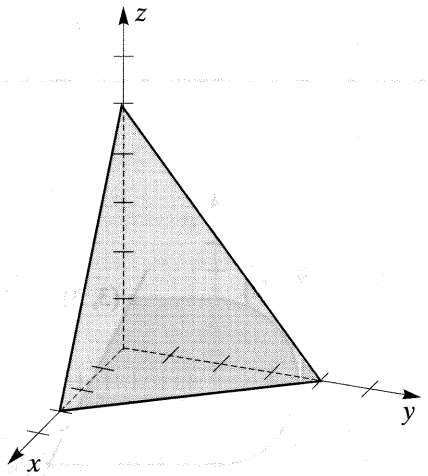
**10** $x - y = -1$, $7x - y = 17$, $2x + y = -2$

**11** $y = e^x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = -\pi$, $x = \pi$

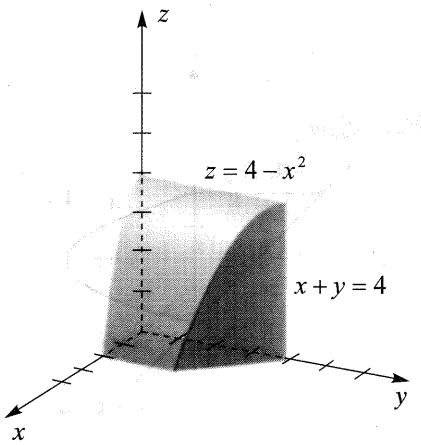
**12** $y = x^2$, $y = 1/(x^2 + 1)$

**Exercs. 13-16:** Estabeleça uma integral dupla para calcular o volume do sólido.

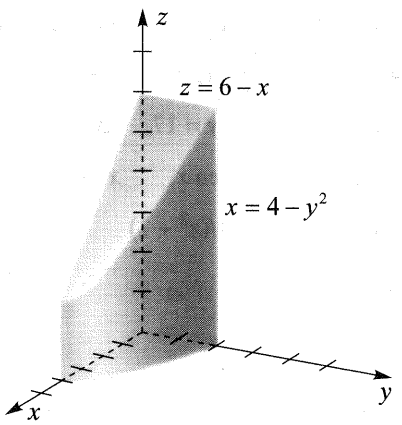
**13**



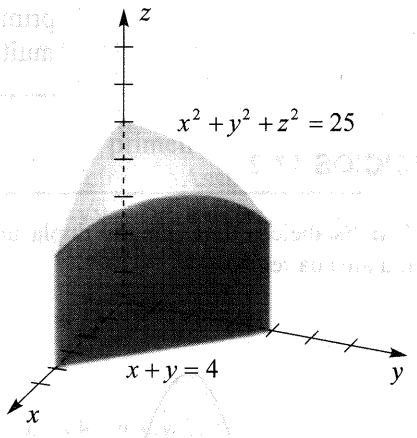

**14**




**15**




**16**




**Exercs. 17-20:** A integral dupla iterada representa o volume de um sólido sob uma superfície $S$ e sobre uma região $R$ do plano-$xy$. Descreva $S$ e esboce $R$.

**17** $\int_0^4 \int_{-1}^{2} 3 \, dy \, dx$

**18** $\int_0^1 \int_{3-x}^{3-x^2} \sqrt{25 - x^2 - y^2} \, dy \, dx$

**19** $\int_{-2}^{1} \int_{x-1}^{1-x^2} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$

**20** $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

**Exercs. 21-22:** Ache o volume do sólido situado abaixo do gráfico da equação e acima da região do plano-$xy$ delimitada pelo polígono de vértices dados.

**21** $z = 4x^2 + y^2$; (0, 0), (0, 1),(2, 0), (2, 1)

**22** $z = x^2 + 4y^2$; (0, 0), (1, 0), (1, 2)

**Exercs. 23-30:** Esboce o sólido no primeiro octante delimitado pelos gráficos das equações e ache seu volume.

**23** $x^2 + z^2 = 9$, $y = 2x, y = 0$, $z = 0$

**24** $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

**25** $2x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

**26** $y^2 = z$, $y = x$, $x = 4$, $z = 0$

**27** $z = x^2 + y^2$, $y = 4 - x^2, x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

**28** $z = y^3$, $y = x^3$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$

**29** $z = x^3$, $x = 4y^2$, $16y = x^2$, $z = 0$

**30** $x^2 + y^2 = 16$, $x = z$, $y = 0$, $z = 0$

**Exercs. 31-32:** Ache o volume do sólido delimitado pelos gráficos das equações.

**31** $z = x^2 + 4$, $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $z = 0$

**32** $y = x^3$, $y = x^4$, $z - x - y = 4$, $z = 0$

**Exercs. 33-34:** Ref. (17.9). Aproxime o volume $V = \int_0^1 \int_0^{1/2} f(x, y)\, dy\, dx$ para a função $f$ dada, utilizando

$$\sum_{k=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k$$

com $\Delta x_4 = \frac{1}{4}$, $\Delta y_j = \frac{1}{4}$, $u_k = \frac{1}{4}k - \frac{1}{8}$, e $v_j = \frac{1}{4}j - \frac{1}{8}$ para k = 1, 2, 3, 4 e j = 1, 2.

**33** $f(x, y) = \text{sen}\,[\cos(xy)]$

**34** $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$

## 17.3 INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

Nesta seção veremos como calcular uma integral dupla sobre uma região $R$ delimitada por gráficos de equações polares. Consideremos primeiro a *região polar elementar* da Figura 17.24, delimitada por arcos de círculos de raios $r_1$ e $r_2$, com centros na origem, e por dois raios emanados da origem. Se $\Delta\theta$ é a medida em radianos do ângulo entre os raios e se $\Delta r = r_2 - r_1$, então a área $\Delta A$ da região é

$$\Delta A = \tfrac{1}{2} r_2^2\, \Delta\theta - \tfrac{1}{2} r_1^2\, \Delta\theta$$

Esta fórmula pode também ser escrita

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\, \Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\, \Delta\theta$$

Denotando por $\bar{r}$ o **raio médio** $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ então

$$\Delta A = \bar{r}\, \Delta r\, \Delta\theta$$

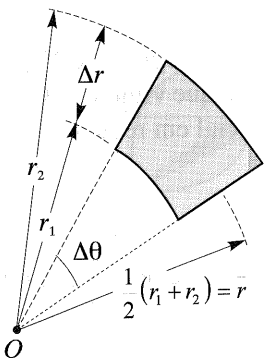



**Figura 17.24** $\Delta A = \bar{r}\, \Delta r\, \Delta\theta$.

Em seguida, consideremos a região $R$ do tipo ilustrado na Figura 17.25 (i), delimitada por dois raios que fazem ângulos positivos $\alpha$ e $\beta$ com o eixo polar, e pelos gráficos de suas equações polares $r = g_1(\theta)$ e $r = g_2(\theta)$, em que $g_1$ e $g_2$ são funções contínuas e $g_1(\theta) \le g_2(\theta)$ para $\alpha \le \theta \le \beta$. Se $R$ é subdividida por meio de arcos circulares e raios conforme Figura 17.25(ii), então a coleção de regiões polares elementares $R_1, R_2, \ldots, R_n$ que estão completamente dentro de $R$ é chamada uma **partição polar interior** $P$ de $R$. A norma $\|P\|$ da partição é o comprimento da maior diagonal dos $R_k$. Escolhido um ponto $(r_k, \theta_k)$ em $R_k$ tal que $r_k$ seja o raio médio, então

$$\Delta A_k = r_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$$

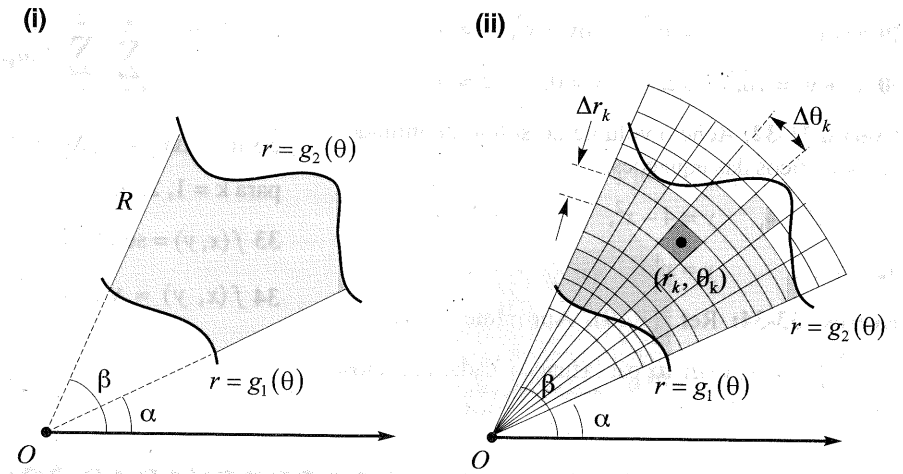



**Figura 17.25**

Se $f$ é uma função contínua das variáveis polares $r$ e $\theta$, então pode-se provar o seguinte.

**Teorema de cálculo (17.13)**

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) r_k \, \Delta r_k \, \Delta\theta_k = \iint_R f(r, \theta) \, dA$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta$$

Note que o integrando à direita de (17.13) é o produto de $f(r, \theta)$ e $r$. Isto porque $\Delta A_k$ é igual a $r_k \, \Delta r_k \, \Delta\theta_k$.

Podemos considerar a integral iterada (17.13) um limite de somas duplas. Primeiro, *mantemos* $\theta$ *fixo* e somamos ao longo da região em forma de cunha exibida na Figura 17.26, do gráfico de $g_1$ até o gráfico de $g_2$. Para a segunda somatória, *varremos* a região fazendo $\theta$ variar de $\alpha$ a $\beta$. A integral iterada denota o limite dessas somas quando $\|P\| \to 0$.

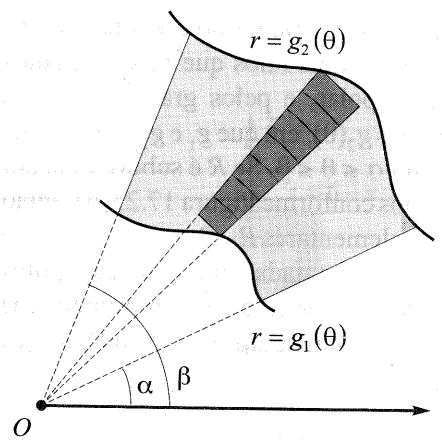



**Figura 17.26**

Se $f(r, \theta) = 1$ em toda $R$, então a integral em (17.13) é igual à área de $R$. Isto decorre também do que vimos no Capítulo 13, pois, após efetuar a integração parcial em relação a $r$, obtemos a fórmula do Teorema (13.11).

## EXEMPLO 1

Ache a área da região $R$ exterior ao círculo $r = a$ e interior ao círculo $r = 2a$ sen $\theta$.

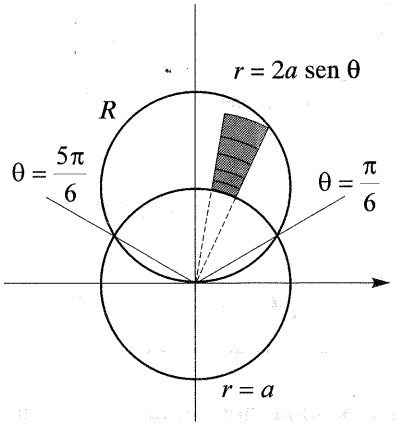



Figura 17.27

## SOLUÇÃO

A Figura 17.27 é um esboço da região, juntamente com uma cunha típica de regiões polares elementares obtidas somando-se da fronteira interior $r = a$ à fronteira exterior $r = 2a$ sen θ. Varremos então a região fazendo θ variar de π/6 a 5π/6. (Um erro comum consiste em fazer θ variar de 0 a π. Onde está o erro?)

Pelo Teorema (17.13) com $f(r,\theta) = 1$,

$$A = \iint_R dA = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_a^{2a \operatorname{sen}\theta} r\, dr\, d\theta.$$

Para simplificar o cálculo, podemos utilizar a simetria de $R$ em relação ao eixo-$y$. Neste caso, fazemos θ variar de π/6 a π/2 e duplicamos o valor da integral. Assim,

$$A = \iint_R dA = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_a^{2a \operatorname{sen}\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[ \tfrac{1}{2} r^2 \right]_a^{2a \operatorname{sen}\theta} d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (4a^2 \operatorname{sen}^2\theta - a^2)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left( 4\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 1 \right) d\theta = a^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \left[ \theta - \operatorname{sen} 2\theta \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = a^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) - \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$= a^2 \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 1{,}9a^2$$

## EXEMPLO 2

Ache a área da região $R$ delimitada por um laço da lemniscata $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$, $a > 0$.

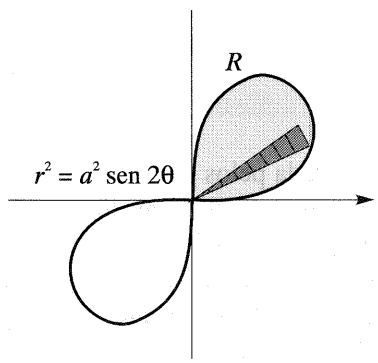



Figura 17.28

## SOLUÇÃO

A Figura 17.28 ilustra a lemniscata, juntamente com uma cunha de regiões polares elementares obtida somando-se da origem ($r = 0$) à fronteira $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ de $R$ no primeiro quadrante. Varremos então o laço fazendo θ variar de 0 a π/2. (Note que $r$ *não é definido* se π/2 < θ < π ou 3π/2 < θ < 2π.)

Pelo Teorema (17.13),

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[ \tfrac{1}{2} r^2 \right]_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{4} a^2 [\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = -\tfrac{1}{4} a^2(-1 - 1) = \tfrac{1}{2} a^2$$

Sob condições adequadas, uma integral dupla iterada em coordenadas retangulares pode ser transformada em uma integral dupla em coordenadas polares. Primeiro, substituímos as variáveis $x$ e $y$ no integrando por $r \cos \theta$ e $r \operatorname{sen} \theta$. Em seguida, na integral iterada, $dydx$ ou $dxdy$ é substituído por $r\, dr\, d\theta$ ou $r\, d\theta\, dr$. A fórmula seguinte indica a forma de um integrando típico. O sinal de integral dupla $\iint_R$ deve ser substituído por sinais convenientes de integrais *iteradas*, e $dA = dxdy$ por $r\, dr\, d\theta$.

**Fórmula de mudança de variáveis (17.14)**

$$\iint_R f(x, y)\, dy\, dx = \iint_R f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Se o integrando $f(x, y)$ de uma integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ contém a expressão $x^2 + y^2$ ou se a região $R$ envolve arcos circulares com centros na origem, então a introdução de coordenadas polares em geral conduz a um cálculo mais simples, porque $x^2 + y^2 = r^2$ e os arcos circulares têm equações da forma $r = k$. O exemplo seguinte ilustra o caso.

## EXEMPLO 3

Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$

## SOLUÇÃO

A região de integração é delimitada pelos gráficos de $y = 0$ (o eixo-$x$) e $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (um semicírculo), conforme Figura 17.29. Primeiro substituímos no integrando $x^2 + y^2$ por $r^2$ e $dydx$ por $r\, dr\, d\theta$. Em seguida, passamos os limites para coordenadas polares. Referindo-nos à Figura 17.29, vemos que

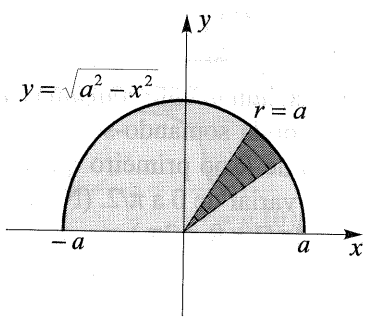



**Figura 17.29**

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{a} r^3\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi}\left[\tfrac{1}{5}r^5\right]_0^a d\theta = \tfrac{1}{5}a^5\int_0^{\pi} d\theta$$

$$= \tfrac{1}{5}a^5\left[\theta\right]_0^{\pi} = \tfrac{1}{5}\pi a^5$$

As coordenadas polares também podem ser usadas para integrais duplas se $R$ é uma região do tipo ilustrado na Figura 17.30(i). Neste caso $R$ é delimitada pelos arcos de dois círculos de raios $a$ e $b$ e pelos gráficos de duas equações polares e, em que $h_1$ e $h_2$ são funções contínuas $h_1(r) \le h_2(r)$ para $a \le r \le b$. Se $f$ é função de $r$ e e se $f$ é contínua em $R$, então o limite em (17.13) existe e a fórmula de cálculo é dada no próximo teorema.

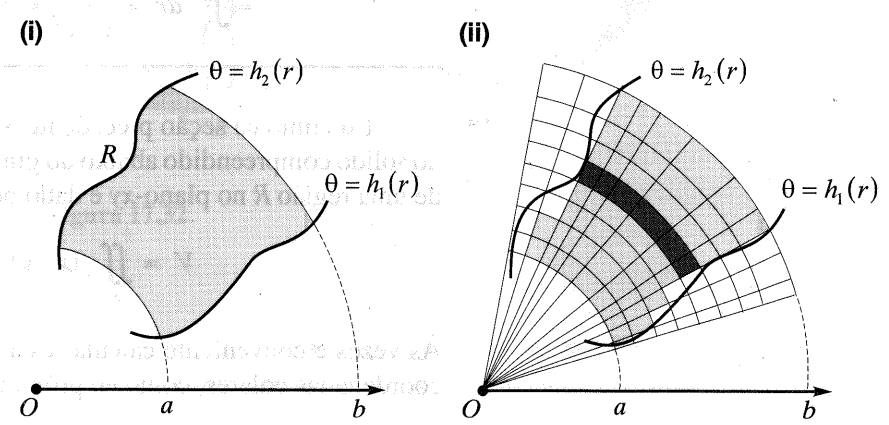



**Figura 17.30**

**Teorema de cálculo (17.15)**

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta)\, r\,d\theta\,dr$$

A integral iterada no Teorema (17.15) pode ser interpretada em termos de limites de somas duplas. Primeiro mantemos $r$ fixo e somamos ao longo de um arco circular ilustrado pela região cinza da Figura 17.30(ii). Em seguida, varremos $R$ somando termos que correspondem às regiões em forma de anel, de $r = a$ a $r = b$.

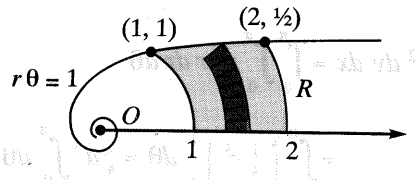



**Figura 17.31**

## EXEMPLO 4

Ache a área da menor das regiões delimitadas pelo eixo polar, pelos gráficos de $r = 1$ e $r = 2$ e pela parte da espiral $r\theta = 1$ de $\theta = \frac{1}{2}$ a $\theta = 1$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.31 mostra a região $R$ juntamente com um anel de regiões polares elementares. Apliquemos o Teorema (17.15) com $f(r, \theta) = 1$:

$$A = \iint_R dA = \int_1^2 \int_0^{1/r} r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^2 r \left[ \theta \right]_0^{1/r} dr = \int_1^2 r \left( \frac{1}{r} \right) dr$$

$$= \int_1^2 dr = \left[ r \right]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

---

Tal como na seção precedente, se $f(x, y) \geq 0$, o volume $V$ do sólido compreendido abaixo do gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de uma região $R$ no plano-$xy$ é dado por

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

Às vezes é conveniente calcular esta integral dupla utilizando coordenadas polares, como no próximo exemplo.

## EXEMPLO 5

Ache o volume $V$ do sólido delimitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano-$xy$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.32(i) ilustra a porção do sólido no primeiro octante. Por simetria, basta achar o volume desta porção e multiplicar o resultado por 4.

A região $R$ do plano-$xy$ é delimitada pelos eixos coordenados e por um quarto do círculo de equação polar $r = 2$, conforme Figura 17.32(ii), na qual também se ilustra uma cunha de regiões polares elementares. A base do prisma na Figura 17.32(i) corresponde a *uma* região polar elementar. Podemos obter o volume do sólido fazendo $r^2 = x^2 + y^2$ e a mudança de variáveis dada pela Fórmula (17.14).

$$V = 4 \iint_R (4 - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[ 2r^2 - \tfrac{1}{4} r^4 \right]_0^2 d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} 4\, d\theta = 16 \left[ \theta \right]_0^{\pi/2} = 8\pi$$

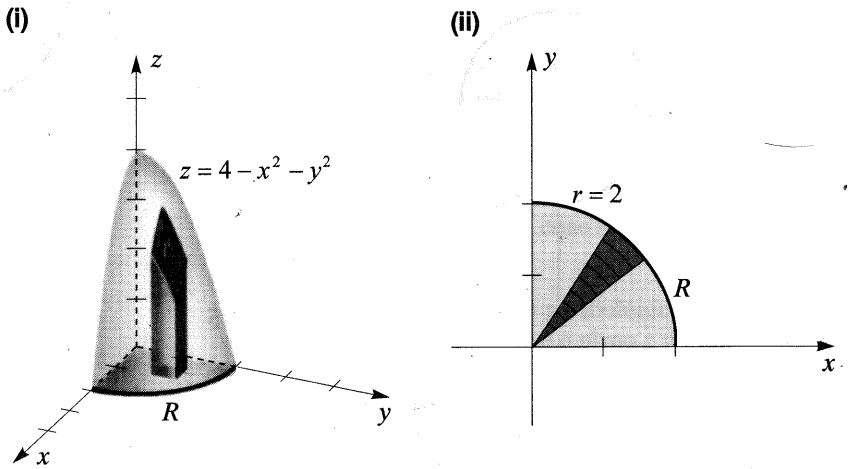



**Figura 17.32**

O mesmo problema, posto em termos de coordenadas retangulares, conduz à integral dupla seguinte:

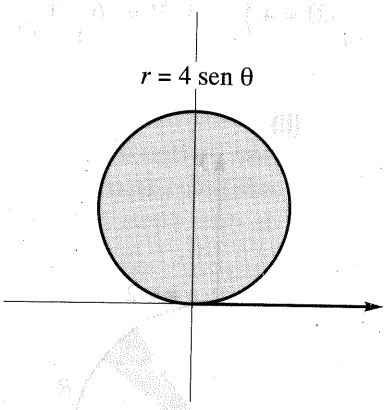
$$V = 4 \iint_R (4 - x^2 - y^2)\, dA = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

O cálculo da última integral deve ser suficiente para convencer qualquer um da vantagem do uso de coordenadas polares em certos problemas.

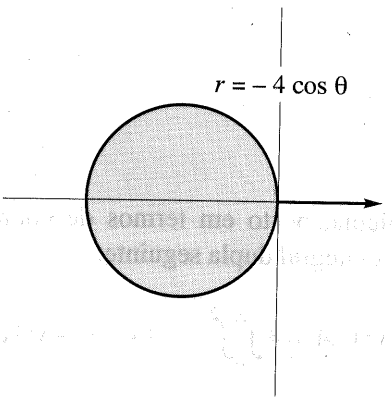
## EXERCÍCIOS 17.3

**Exercs. 1-6:** Expresse a área da região como uma integral dupla iterada em coordenadas polares, utilizando a simetria sempre que possível.

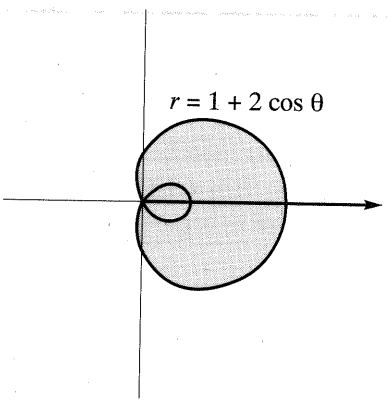
**1**



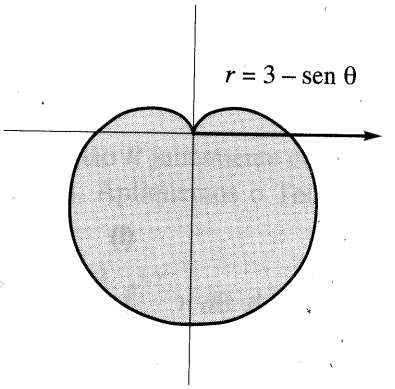

**2**



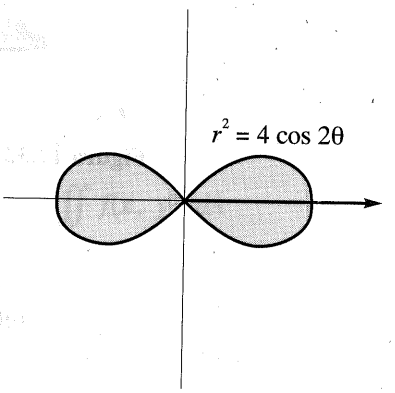

**3**



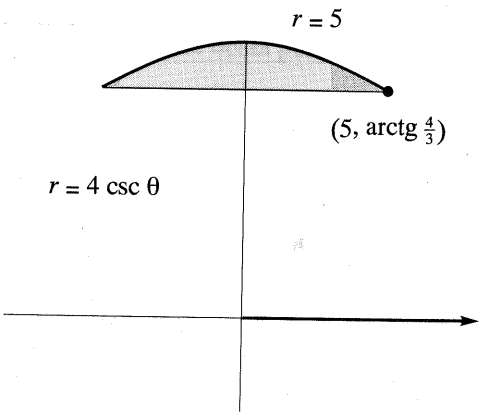

**4**




**5**




**6**



**Exercs. 7-12:** Use uma integral dupla para achar a área da região da forma indicada.

**7** Um laço de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

**8** Um laço de $r = 2 \cos 4\theta$

**9** Interior a $r = 2 - 2 \cos \theta$ e exterior a $r = 3$

**10** Delimitada por $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$

**11** Um laço de $r^2 = 9 \cos 2\theta$

**12** Interior a $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ e exterior a $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

**Exercs. 13-24:** Por meio de coordenadas polares, calcule a integral.

**13** $\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$;

$R$ limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$.

**14** $\iint_R x^2 (x^2 + y^2)^3\, dA$;

$R$ limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ e eixo $x$.

**15** $\iint_R \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dA$;

$R$ é a região anular limitada por $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$.

**16** $\iint_R (x + y)\, dA$;

$R$ limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 2y$.

**17** $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$;

$R$ limitada pelo triângulo de vértices (0, 0), (3, 0), (3, 3).

**18** $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$;

$R$ limitada pelo círculo $y = \sqrt{2x - x^2}$ e a linha $y = x$.

**19** $\int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{-(x^2 + y^2)}\, dy\, dx$

**20** $\int_{0}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx$

**21** $\int_{1}^{2} \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\, dx$

**22** $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1 - x^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\, dx$

**23** $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4 - y^2}} \cos (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

**24** $\int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{2y - y^2}}^{\sqrt{2y - y^2}} x\, dx\, dy$

**Exercs. 25-30:** Por meio de coordenadas polares ache o volume do sólido que tem a forma de $Q$.

**25** $Q$ é a região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

**26** $Q$ é cortado do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

**27** $Q$ é delimitada pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = x$.

**28** $Q$ é delimitada pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$, o cilindro $x^2 + y^2 = 3y$ e o plano $z = 0$.

**29** $Q$ é a maior região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

**30** $Q$ é delimitada pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 5$.

**31** Seja $R_a$ a região delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Definindo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \lim_{a \to \infty} \iint_{R_a} e^{-(x^2 + y^2)}\, dA$$

calcule a integral dupla imprópria.

**32** (a) Pode-se provar, por métodos mais avançados, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

Use este fato e o Exercício 31 para mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Interprete este resultado geometricamente.

(b) Utilizando a parte (a), prove o seguinte resultado, importante ao campo da estatística:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1$$

**Exercs. 33-34:** Às vezes podemos calcular uma integral dupla transformando-a em uma integral simples. (a) Utilize coordenadas polares para transformar a integral dupla dada em uma integral simples envolvendo apenas uma variável $r$. (b) Use a regra de Simpson com $n = 4$ para obter uma aproximação da integral simples.

**33** $\iint_R \sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}\, dA$;

$R$ é a região no primeiro quadrante delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e os eixos coordenados.

**34** $\iint_R \operatorname{sen} \sqrt[3]{x^2 + y^2}\, dA$;

$R$ é a região delimitada pelo semicírculo $x = \sqrt{1 - y^2}$ e o eixo-$x$.

## 17.4 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

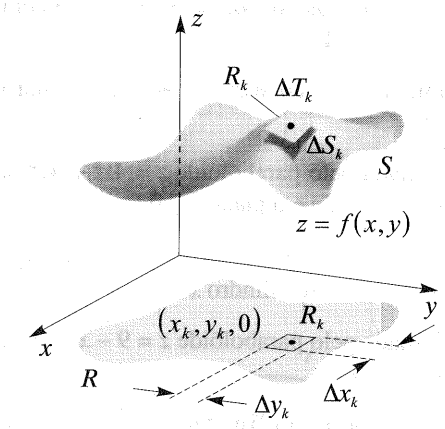



**Figura 17.33**

Na Seção 6.5 estabelecemos fórmulas para a área de uma superfície de revolução. Estudaremos agora um método para achar áreas de superfícies mais gerais. Suponhamos que $f(x, y) \geq 0$ em toda uma região $R$ no plano-$xy$ e que $f$ tenha derivadas parciais primeiras contínuas em $R$. Denotemos por $S$ a porção do gráfico de $f$ cuja projeção no plano-$xy$ é $R$, conforme ilustrado na Figura 17.33. Para simplificar, admitiremos que não haja nenhum vetor normal a $S$ paralelo ao plano-$xy$. Queremos definir a área $A$ de $S$ e obter uma fórmula para calcular $A$.

Seja $P = \{R_k\}$ uma partição interior de $R$, e sejam $\Delta x_k$ e $\Delta y_k$ as dimensões do retângulo $R_k$. Para cada $k$, escolhamos um ponto arbitrário $(x_k, y_k, 0)$ em $R_k$ e seja $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ o ponto correspondente em $S$. Consideremos em seguida o plano tangente a $S$ em $B_k$ (ver Figura 17.33), e sejam $\Delta T_k$ e $\Delta S_k$ as áreas das regiões no plano tangente e em $S$, respectivamente, obtidas projetando-se $R_k$ verticalmente para cima. Se a norma $\|P\|$ da partição é pequena, então $\Delta T_k$ é uma aproximação de $\Delta S_k$ e $\sum_k \Delta T_k$ é uma aproximação da área $A$ de $S$. Esta aproximação deve melhorar à medida que $\|P\|$ tende para 0, o que nos leva à seguinte definição.

**Definição (17.16)**

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \Delta T_k$$

Para achar uma fórmula de integral para $A$, escolhamos $(x_k, y_k, 0)$ como o canto de $R_k$ mais próximo da origem. De acordo com a visão isolada de $\Delta T_k$ da Figura 17.34, consideremos os vetores **a** e **b** com ponto inicial $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$, tangentes aos traços de $S$ nos planos $y = y_k$ e $x = x_k$, respectivamente. Pelo Teorema (16.10), os coeficientes angulares das retas determinadas por **a** e **b** nesses planos são $f_x(x_k, y_k)$ e $f_y(x_k, y_k)$, respectivamente. Segue-se que

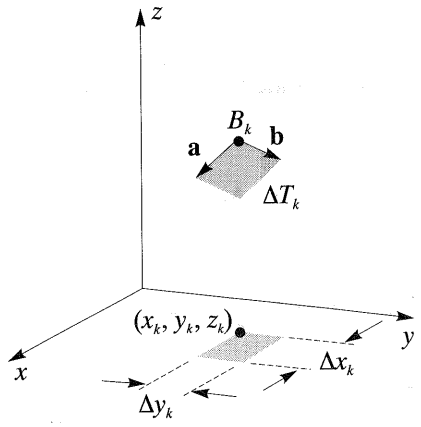



**Figura 17.34**

$$\mathbf{a} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \mathbf{k}$$

Pela Seção 14.4, a área $\Delta T_k$ do paralelogramo definido por **a** e **b** é $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \end{vmatrix}$$

temos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k\,\Delta y_k \mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\,\Delta x_k\,\Delta y_k \mathbf{j} + \Delta x_k\,\Delta y_k \mathbf{k}$$

Conseqüentemente,

$$\Delta T_k = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\;\Delta x_k\,\Delta y_k$$

onde $\Delta x_k\,\Delta y_k = \Delta A_k$. Se, como em (17.16), tomarmos o limite de somas dos $\Delta T_k$ e aplicarmos a definição de integral dupla, obteremos o seguinte:

**Integral para a área de uma superfície (17.17)**

$$A = \iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\;dA$$

A fórmula (17.17) é válida também se $f(x, y) \leq 0$ em $R$.

## EXEMPLO 1

Seja $R$ a região triangular no plano-$xy$ de vértices (0, 0, 0), (0, 1, 0) e (1, 1, 0). Ache a área da superfície da porção do gráfico de $z = 3x + y^2$ que está acima de $R$.

## SOLUÇÃO

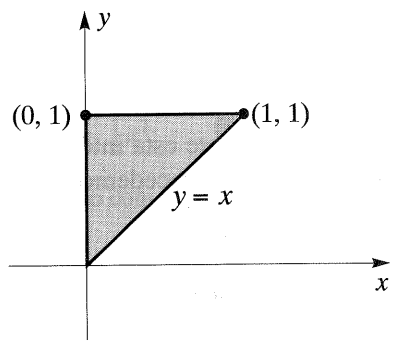



**Figura 17.35**

A região $R$ no plano-$xy$ é limitada pelos gráficos de $y = x$, $x = 0$ e $y = 1$, conforme Figura 17.35. Fazendo $f(x, y) = 3x + y^2$ e aplicando (17.17), temos

$$A = \iint_R \sqrt{3^2 + (2y)^2 + 1}\;dA = \int_0^1 \int_0^y (10 + 4y^2)^{1/2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (10 + 4y^2)^{1/2} \left[x\right]_0^y dy = \int_0^1 (10 + 4y^2)^{1/2} y\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{12}(10 + 4y^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{14^{3/2} - 10^{3/2}}{12} \approx 1{,}7 \text{ unidade de área}$$

## EXEMPLO 2

Ache a área da superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.36(i) ilustra o parabolóide. Aplicando (17.17) com $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, temos

$$A = \iint_R \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

em que $R$ é a região do plano-$xy$ delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$. Por simetria, podemos achar a área correspondente à parte de $R$ no primeiro quadrante, conforme Figura 17.36(ii) e então multiplicar este resultado por 4. Com uma integral iterada, temos

$$A = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dy\, dx$$

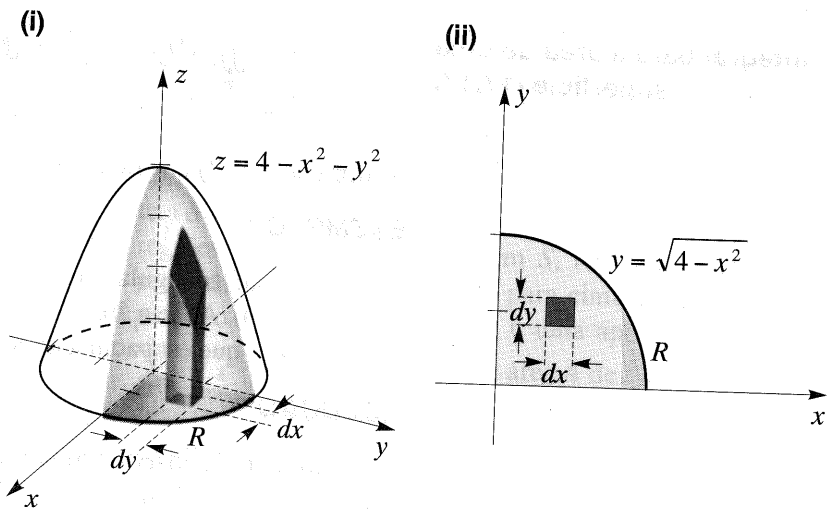



**Figura 17.36**

Seria muito trabalhoso calcular diretamente esta integral; passamos, pois, para coordenadas polares e procedemos como a seguir:

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[ \tfrac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{12}(17^{3/2} - 1)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}(17^{3/2} - 1)\left[\ \theta\ \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1) \approx 36{,}2$$

Podem-se estabelecer fórmulas análogas a (17.17) no caso de a superfície ter projeções convenientes nos planos $yz$ ou $xz$. Assim, se $S$ é o gráfico de uma equação $y = g(x, z)$ e se a projeção no plano-$xz$ é $R_1$, então

$$A = \iint_{R_1} \sqrt{[g_x(x,\ z)]^2 + [g_z(x,\ z)]^2 + 1}\ dA$$

Pode-se estabelecer fórmula análoga se $S$ é dado por $x = h(y, z)$.

## EXERCÍCIOS 17.4

**Exercs. 1-4:** Estabeleça uma integral dupla iterada para calcular a área da parte do gráfico da equação situada acima da região $R$ no plano-$xy$ e com a fronteira indicada. Utilize a simetria sempre que possível.

**1** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

quadrado de vértices $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$

**2** $x^2 - y^2 + z^2 = 1$;

quadrado de vértices $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$

**3** $36z^2 = 16x^2 + 9y^2 + 144$;

círculo de centro na origem e raio 3

**4** $9y^2 = 225z^2 + 25x^2$;

triângulo de vértices $(0, 0), (3, 5), (-3, 5)$

**Exercs. 5-6:** Ache a área da parte do gráfico da equação que está acima da região $R$ no plano-$xy$ que tem a fronteira indicada.

**5** $z = y + \frac{1}{2}x^2$;

quadrado com vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$

**6** $z = y^2$;

triângulo com vértices $(0, 0), (0, 2), (2, 2)$

**7** Corta-se uma parte do plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = k^2$, em que $a$, $b$, $c$ e $k$ são positivos. Ache a área da parte cortada.

**8** Ache a área da parte, no primeiro octante, do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$ (ver Figura 17.23).

**Exercs. 9-12:** Ache a área da superfície $S$.

**9** $S$ é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ cortada pelo plano $z = 1$.

**10** $S$ é a parte do plano $z = y + 1$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

**11** $S$ é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$.

**12** $S$ é a parte, no primeiro octante, do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

**13** Uma tenda em forma de cúpula deve ter o chão circular com raio de 5 m e teto em forma do gráfico de $z = 7 - \frac{7}{25}(x^2 + y^2)$, $z \geq 0$. Aproxime o número de metros quadrados de material necessário para construir a tenda. (Desconsidere perdas ou superposição de material.)

**14** Um gerador de Van de Graaff pode produzir milhões de volts de eletricidade estática e grandes centelhas. Parte do gerador consiste em uma capa metálica esférica com um orifício circular feito na base. A carga total $C$ (em coulombs) gerada é dada por $C = \delta A$, em que $A$ é a área da superfície metálica e $\delta$ é a densidade de carga por área na

superfície. Suponha que a esfera possa ser representada por $x^2+y^2+z^2=1$, e que o furo seja obtido pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ com a esfera, para $z < 0$, e $x$, $y$ e $z$ sejam medidos em metros. Aproxime $C$ se $\delta = 1{,}2 \times 10^{-5}$ coulomb/m$^2$. (Este valor de $C$ corresponde a um potencial de voltagem de aproximadamente 1,35 milhão de volts.)

Ⓒ **Exercs. 15-16:** Ref. Exercícios 51-52 da Seção 17.1. Use a *regra do trapézio* com $n = 2$ para aproximar a área da parte do gráfico de $f$ que está acima da região quadrada $R$ de vértices dados no plano-$xy$.

**15** $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \cos y$; $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$

**16** $f(x, y) = x^3y$; $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

## 17.5 INTEGRAIS TRIPLAS

Podemos definir as *integrais triplas* para uma função $f$ de *três* variáveis $x, y, z$ utilizando um processo de quatro passos análogo ao apresentado na Seção 17.1 para funções de duas variáveis. O caso mais simples ocorre se $f$ é contínua em toda uma região em forma de paralelepípedo $Q$ em três dimensões do seguinte tipo:

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, c \le y \le d, m \le z \le n\}$$

A Figura 17.37(i) ilustra uma posição possível de $Q$. Dividindo-se $Q$ em sub-regiões $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ por meio de planos paralelos aos três planos coordenados (ver Figura 17.37(ii)), então a coleção $\{Q_k\}$ é uma **partição** $P$ de $Q$. A **norma** $\|P\|$ da partição é o comprimento da maior diagonal de todos os $Q_k$. De acordo com a Figura 17.37(iii), se $\Delta x_k$, $\Delta y_k$ e $\Delta z_k$ são as dimensões de $Q_k$, então seu volume $\Delta V_k$ é

$$\Delta V_k = \Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k$$

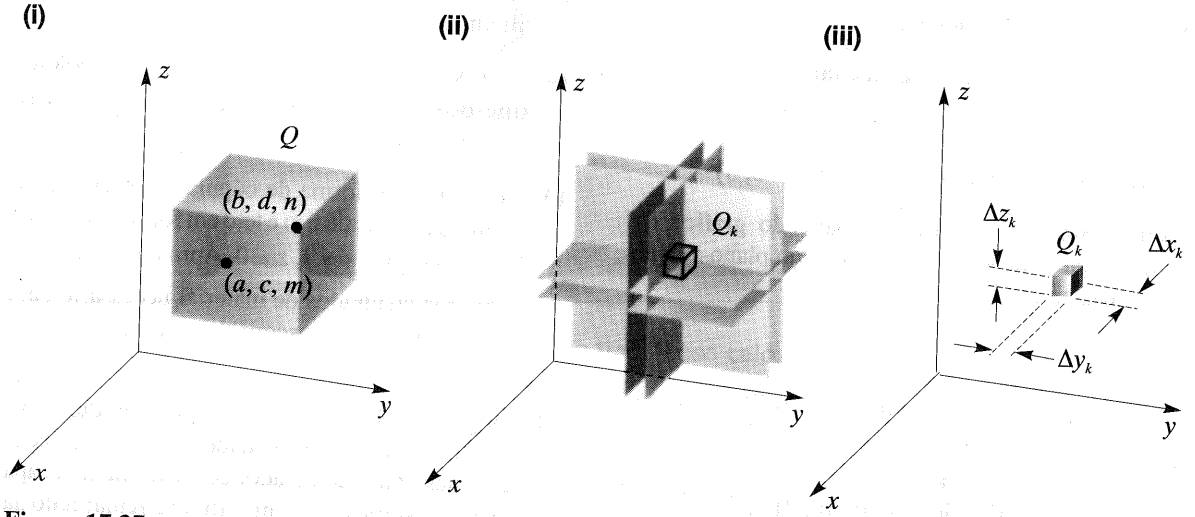



**Figura 17.37**

Uma **soma de Riemann** de $f$ para $P$ é

$$\sum_k f(u_k, v_k, w_k)\ \Delta V_k$$

em que $(u_k, v_k, w_k)$ é um ponto arbitrário em $Q_k$. A definição de limite de uma soma de Riemann, quando $\|P\| \to 0$, é análoga à das funções de duas variáveis. Se o limite existe, é chamado **integral tripla de $f$ sobre $Q$** e se denota por $\iiint_Q f(x, y, z)\ dV$. Com a notação de limite, temos o seguinte:

**Integral tripla de $f$ sobre $Q$ (17.18)**

$$\iiint_Q f(x, y, z)\ dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k)\ \Delta V_k$$

Pode-se mostrar que, se $Q$ é a região da Figura 17.37(i), então

$$\iiint_Q f(x, y, z)\ dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz$$

Calcula-se a integral iterada à direita começando pela integral *mais interna* e procedendo para fora. Assim, a primeira integração é em relação a $x$ (com $y$ e $z$ fixos), a segunda é em relação a $y$ (com $z$ fixo) e a terceira é em relação a $z$. Há cinco outras integrais iteradas iguais à integral tripla de $f$ sobre $Q$. Por exemplo, integrando na ordem $y, z, x$,

$$\iiint_Q f(x, y, z)\ dV = \int_a^b \int_m^n \int_c^d f(x, y, z)\ dy\ dz\ dx$$

Pode-se mostrar que, para o paralelepípedo $Q$ da Figura 17.37(i), a ordem de integração é irrelevante.

## EXEMPLO 1

Calcule $\iiint_Q (xy^2 + yz^3)\ dV$ se

$$Q = \{(x, y, z): -1 \le x \le 1, 3 \le y \le 4, 0 \le z \le 2\}$$

## SOLUÇÃO

Das seis integrais iteradas possíveis, utilizaremos a seguinte:

$$\int_3^4 \int_{-1}^1 \int_0^2 (xy^2 + yz^3)\ dz\ dx\ dy$$

$$= \int_3^4 \int_{-1}^1 \left[ \int_0^2 (xy^2 + yz^3)\ dz \right] dx\ dy$$

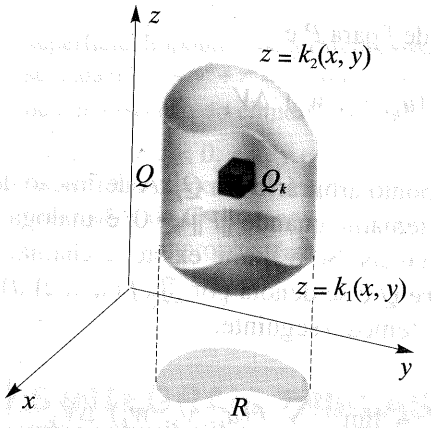



**Figura 17.38**

$$= \int_3^4 \int_{-1}^1 \left[ xy^2 z + y\left(\frac{z^4}{4}\right) \right]_0^2 dx\, dy$$

$$= \int_3^4 \int_{-1}^1 (2xy^2 + 4y)\, dx\, dy$$

$$= \int_3^4 \left[ 2\left(\frac{x^2}{2}\right) y^2 + 4yx \right]_{-1}^1 dy$$

$$= \int_3^4 [(y^2 + 4y) - (y^2 - 4y)]\, dy$$

$$= \int_3^4 8y\, dy = 8\left[\frac{y^2}{2}\right]_3^4 = 28$$

As integrais triplas podem ser definidas sobre uma região mais complicada do que um paralelepípedo. Suponhamos, por exemplo, que $R$ seja a região do plano-$xy$ que possa ser dividida em regiões $R_x$ e $R_y$ e que $Q$ seja a região em três dimensões definida por

$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ em } R \text{ e } k_1(x, y) \le z \le k_2(x, y)\}$$

em que $k_1$ e $k_2$ são funções dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas em toda a $R$. A região $Q$ está entre os gráficos de $z = k_1(x, y)$ e $z = k_2(x, y)$ e sobre (ou sob) a região $R$ (ver Figura 17.38). Subdividindo $Q$ por planos paralelos aos três planos coordenados, então as regiões (pequenas) em forma de paralelepípedos resultantes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ que estão completamente dentro de $Q$ formam uma **partição interior** $P$ de $Q$. A Figura 17.38 exibe um elemento típico $Q_k$ de uma partição interior de $Q$.

Uma **soma de Riemann** de $f$ para $P$ é qualquer soma da forma $\sum_k f(u_k, v_k, w_k)\, \Delta V_k$, em que $(u_k, v_k, w_k)$ é um ponto arbitrário de $Q_k$ e $\Delta V_k$ é o volume de $Q_k$. A integral tripla de $f$ sobre $Q$ é novamente definida como o limite (17.18). Se $f$ é contínua em toda $Q$, é possível provar o seguinte.

**Teorema de cálculo (17.19)**

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[ \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

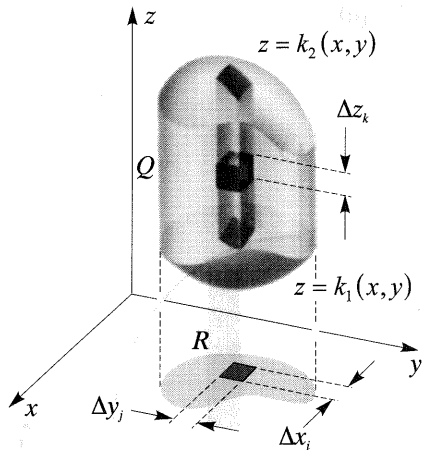



**Figura 17.39**

A notação à direita de (17.19) significa que, após integrar primeiro em relação a $z$, calculamos a integral dupla resultante sobre a região $R$ do plano-$xy$ aplicando os métodos da Seção 17.1. Assim, para uma região $R_x$ como a da Figura 17.8(i),

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

O símbolo à direita desta equação é uma **integral tripla iterada**. É calculada por meio de integrações parciais $f(x, y, z)$ na ordem $z$, $y$, $x$, com os limites indicados substituídos na forma usual. Analogamente, para uma região $R_y$ como a da Figura 17.8(ii),

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

É conveniente encarar qualquer uma das duas últimas integrais como um limite de uma *soma tripla*,

$$\sum_i \sum_j \sum_k f(u_i, v_j, w_k)\,\Delta z_k\,\Delta y_j\,\Delta x_i$$

em que a primeira somatório (em relação a $k$) corresponde a uma coluna de (pequenas) caixas, na direção paralela ao eixo-$z$, da superfície inferior (com equação $z = k_1(x, y)$) para a superfície superior (com equação $z = k_2(x, y)$), conforme ilustrado na Figura 17.39. As duas somatórias restantes se efetuam sobre a região $R$ do plano-$xy$, de acordo com o que vimos no caso das integrais duplas na Seção 17.1.

## EXEMPLO 2

Expresse $\iiint_Q f(x, y, z)\,dV$ como uma integral iterada se $Q$ é a região do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados, pelo parabolóide $z = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

## SOLUÇÃO

Como se vê na Figura 17.40(i), $Q$ está sob o parabolóide e sobre o plano-$xy$. A região $R$ no plano-$xy$ é delimitada pelos eixos coordenados e pelo gráfico de $y = \sqrt{1 - x^2}$. A figura exibe também uma coluna que corresponde a uma primeira somatória sobre os paralelepípedos de volumes $\Delta z_k\,\Delta y_j\,\Delta x_i$ na direção do eixo-$z$.

Como a coluna se estende do plano-$xy$ ao parabolóide, o limite inferior de integração em relação a $z$ é $z = 0$ e o limite superior é $z = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$. A segunda e a terceira integrações se efetuam sobre a região $R$ no plano-$xy$ (ver Figura 17.40(ii)).

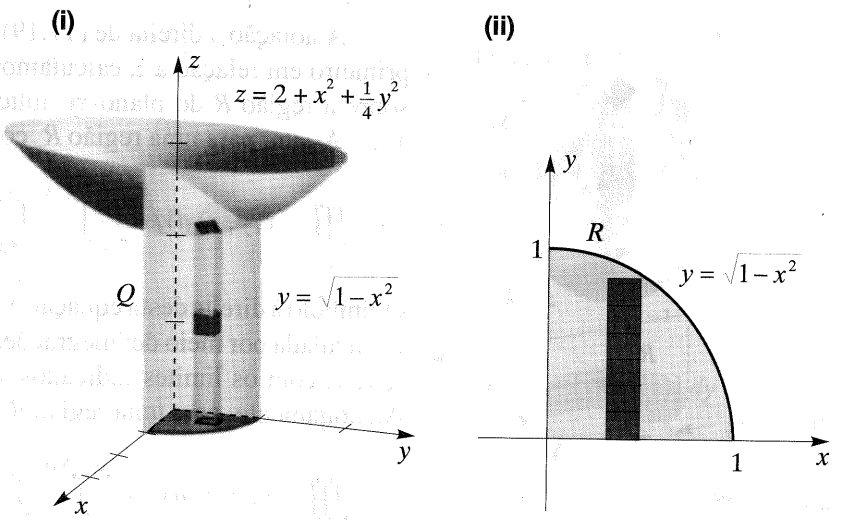



**Figura 17.40**

Assim, a integral em (17.19) tem a forma

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Se $f(x, y, z) = 1$ em toda uma região $Q$, então a integral tripla de $f$ sobre $Q$ se escreve $\iiint_Q dV$ e seu valor é o volume de $Q$. No Exemplo 2, o volume $V$ da região $Q$ da Figura 17.40(i) é dado por

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} dz\, dy\, dx$$

Poderíamos, naturalmente, obter o volume por meio de uma integral dupla, como na Seção 17.2. A razão por que utilizamos uma integral tripla aqui e nos exemplos seguintes é que desejamos desenvolver a prática em lidar com limites de somas triplas. Esta mesma técnica será usada mais adiante em problemas que *não podem* ser resolvidos por integrais duplas.

## EXEMPLO 3

Ache o volume $V$ do sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.41(i) ilustra o sólido, juntamente com uma coluna correspondente a uma primeira somatória na direção do eixo-$z$. Note que a coluna se estende de $z = 0$ a $z = 4 - y$. A região $R$ no

plano-*xy* aparece na Figura 17.41(ii), juntamente com um retângulo correspondente à primeira integração (de uma integral dupla) em relação a *y*. Aplicando (17.19) com $f(x, y, z) = 1$, temos

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dz\, dy\, dx = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\Big[\, z \,\Big]_{0}^{4-y} dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(4-y)\, dy\, dx = \int_{-2}^{2}\Big[\, 4y - \tfrac{1}{2}y^2 \,\Big]_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}(8 - 4x^2 + \tfrac{1}{2}x^4)\, dx = \Big[\, 8x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{10}x^5 \,\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{256}{15} \approx 17$$

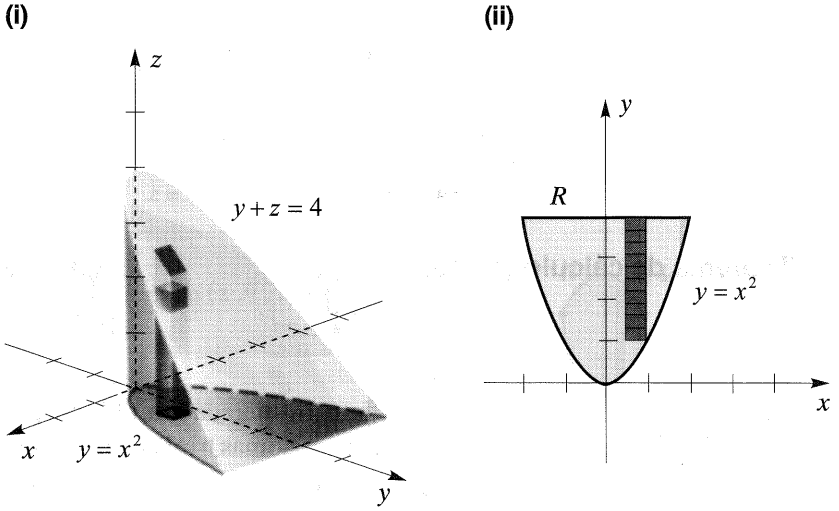



**Figura 17.41**

Tomando a ordem *dxdy* para a integral dupla, o retângulo na Figura 17.41(ii) será horizontal e a fórmula para *V* se tornará

$$V = \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{4-y} dz\, dx\, dy$$

---

Algumas integrais triplas podem ser calculadas por uma integral tripla iterada em que a primeira integração é em relação a *y*. Assim, consideremos

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, h_1(x) \le z \le h_2(x), k_1(x, z) \le y \le k_2(x, z)\}$$

em que $h_1$ e $h_2$ são funções contínuas em $[a, b]$ e $k_1$ e $k_2$ são funções dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas na região $R$ do plano-$xz$ exibido na Figura 17.42. Note que $Q$ está entre os gráficos de $y = k_1(x, z)$ e $y = k_2(x, z)$. A projeção $R$ de $Q$ sobre o plano-$xz$ é uma região $R_x$. Neste caso temos:

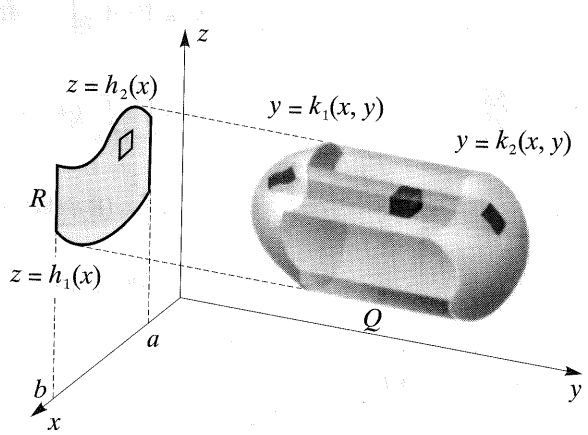



**Figura 17.42**

**Teorema de cálculo (17.20)**

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

A integral iterada em (17.20) pode ser interpretada como um limite de somas triplas obtidas somando-se primeiro sobre uma linha de pequenos paralelepípedos na direção paralela ao eixo-$y$ da superfície à esquerda (com equação $y = k_1(x, z)$) para a superfície à direita (com equação $y = k_2(x, z)$), conforme indicado na Figura 17.42. Calcula-se então a integral dupla resultante sobre a região $R$ no plano-$xz$, como ilustrado no próximo exemplo.

## EXEMPLO 4

Ache o volume da região $Q$ delimitada pelos gráficos de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 6$.

## SOLUÇÃO

Conforme Figura 17.43(i), $Q$ está sob o cilindro $z = 4 - x^2$, sobre o cilindro $z = 3x^2$, à direita do plano-$xz$ e à esquerda do plano $z + y = 6$. Logo, $Q$ é uma região do tipo ilustrado na Figura 17.42 com $k_1(x, z) = 0$ e $k_2(x, z) = 6 - z$. A Figura 17.43(ii) ilustra a região $R$ no plano-$xz$. Aplicando (17.20), temos

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} \left[ y \right]_0^{6-z} dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} (6-z)\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[ 6z - \tfrac{1}{2} z^2 \right]_{3x^2}^{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (16 - 20x^2 + 4x^4)\, dx$$

$$= \frac{304}{15} \approx 20{,}3$$

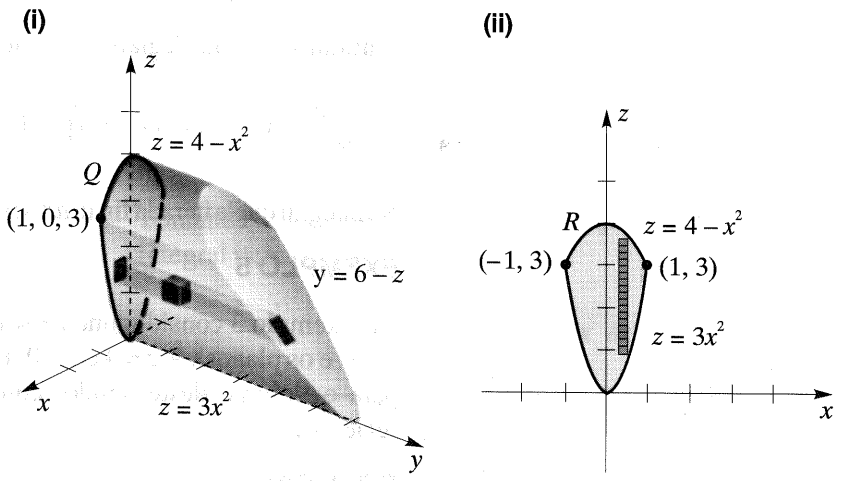



**Figura 17.43**

Se tivéssemos tomado uma ordem diferente de integração, teriam sido necessárias várias integrais triplas. (Você vê a razão disto?)

---

Finalmente, se $Q$ é uma região do tipo ilustrado na Figura 17.44, em que as funções $p_1$ e $p_2$ têm derivadas parciais primeiras

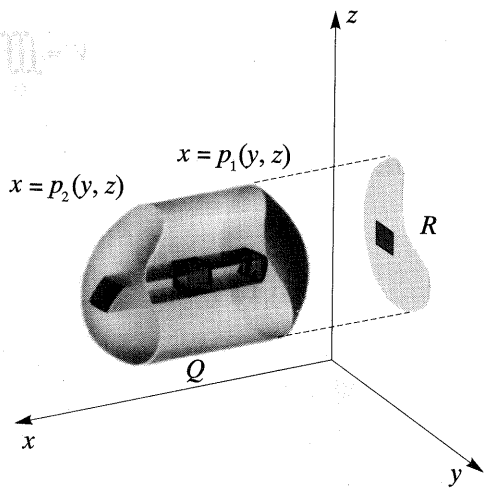



**Figura 17.44**

contínuas em uma região conveniente $R$ do plano-$yz$, então

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[ \int_{p_1(y,z)}^{p_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

Na integral dupla iterada final, $dA$ será substituído por $dzdy$ ou $dydz$.

## EXEMPLO 5

No Exemplo 3 consideramos o sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$. Estabeleça uma integral tripla para o volume deste sólido, com a primeira integração em relação a $x$.

## SOLUÇÃO

O sólido está reesboçado na Figura 17.45(i). Uma primeira integração em relação a $x$ corresponde a uma somatória ao longo de uma coluna de pequenos paralelepípedos na direção paralela ao eixo-$x$, estendendo-se do gráfico de $x = -\sqrt{y}$ ao gráfico de $x = \sqrt{y}$. A região $R$ no plano-$yz$ está entre esses gráficos e é delimitada pelos eixos $y$ e $z$ e a reta $y + z = 4$, conforme Figura 17.45(ii).

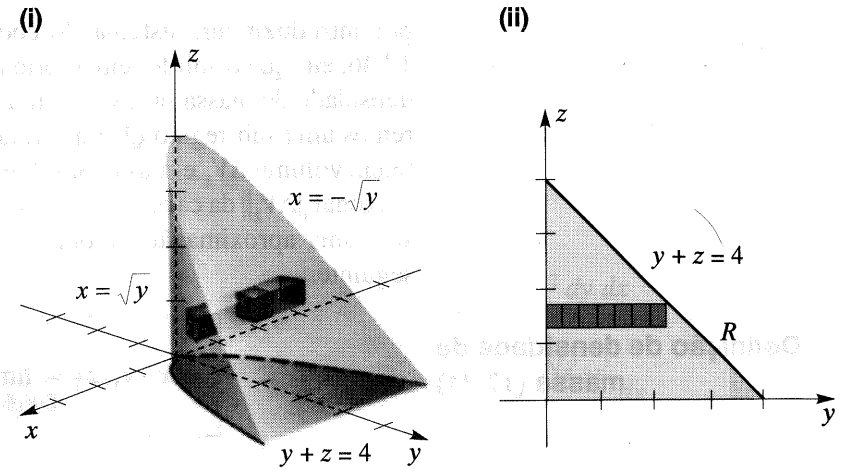



**Figura 17.45**

Se a segunda integração é em relação a $y$, conforme indicado pela linha de retângulos na Figura 17.45(ii), então

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\ dy\ dz$$

Tomando a segunda integração em relação a $z$ em lugar de $y$, a integral iterada é

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\ dz\ dy$$

---

Na próxima seção utilizaremos integrais triplas para achar o *centro de massa* de um sólido. Concluiremos esta seção discutindo as aplicações preliminares da determinação da massa de um sólido.

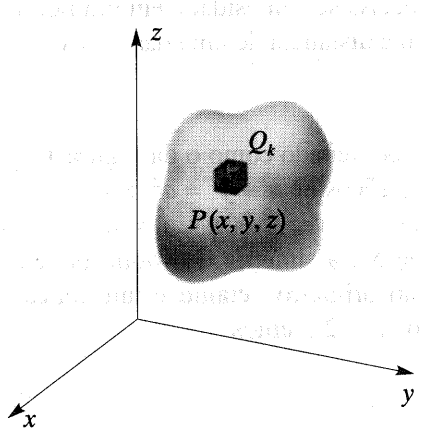



**Figura 17.46**

Se um sólido tem massa $m$ e volume $V$ e se a massa é distribuída uniformemente por todo o sólido, dizemos que o sólido é **homogêneo**. A **densidade de massa** $\delta$ se define como

$$\delta = \frac{m}{V} \qquad \text{ou} \qquad m = \delta V$$

Assim, $\delta$ é massa por unidade de volume. Se, por exemplo, $m$ está em quilogramas e $V$ em metros cúbicos, então $\delta$ está em kg/m$^3$.

Consideremos a seguir um **sólido não-homogêneo**, em que a densidade de massa não é a mesma em todo ele. Por exemplo, um objeto pode consistir em metais diferentes, tais como cobre, ferro e ouro, formando um todo único. Começamos

por introduzir um sistema de coordenadas como na Figura 17.46, em que o sólido tem a forma da região $Q$. Para definir a densidade de massa $\delta(x, y, z)$ em um ponto $P(x, y, z)$, consideremos uma sub-região $Q_k$ em forma de caixa que contenha $P$ e tenha volume $\Delta V_k$ e massa $\Delta m_k$ (ver Figura 17.46). Se a maior diagonal $\|\Delta V_k\|$ da caixa é pequena, é de se esperar que $\Delta m_k/\Delta V_k$ seja uma aproximação de $\delta(x, y, z)$. Isto motiva a definição seguinte.

**Definição de densidade de massa (17.21)**

$$\delta(x, y, z) = \lim_{\|\Delta V_k\| \to 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k}$$

Se o limite em (17.21) existe e $\|\Delta V_k\| \approx 0$, então

$$\Delta m_k \approx \delta(x, y, z)\, \Delta V_k$$

Em alguns casos poderemos conhecer a densidade $\delta(x, y, z)$ e querer achar a massa. Se $\delta$ é uma função contínua e $Q$ é uma região conveniente, então consideramos uma partição interior $\{Q_k\}$ de $Q$, escolhemos um ponto $(x_k, y_k, z_k)$ em cada $Q_k$, e formamos a soma de Riemann $\sum_k \delta(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$. Podemos definir a massa $m$ de $Q$ como um limite de tais somas, o que nos dá o seguinte.

**Massa de um sólido (17.22)**

$$m = \iiint_Q \delta(x, y, z)\, dV$$

## EXEMPLO 6

Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto com raio da base $a$ e altura $h$. Ache a massa se a densidade em um ponto $P$ é diretamente proporcional à distância de uma das bases a $P$.

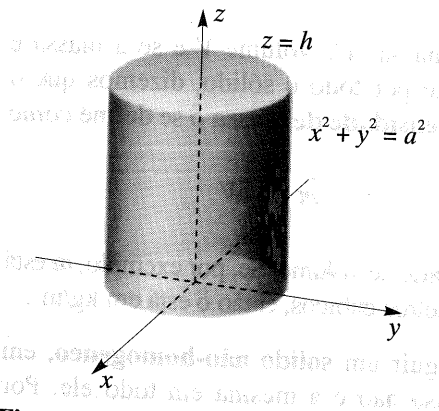


**Figura 17.47**

## SOLUÇÃO

Introduzindo um sistema coordenado como o da Figura 17.47, o sólido é limitado pelos gráficos de $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = h$. Pela hipótese, a densidade em $(x, y, z)$ é $\delta(x, y, z) = kz$ para uma constante $k$. Pela forma de $\delta$ e a simetria do sólido podemos calcular $m$ para a parte do primeiro octante e multiplicar o resultado por 4. Aplicando (17.22), temos

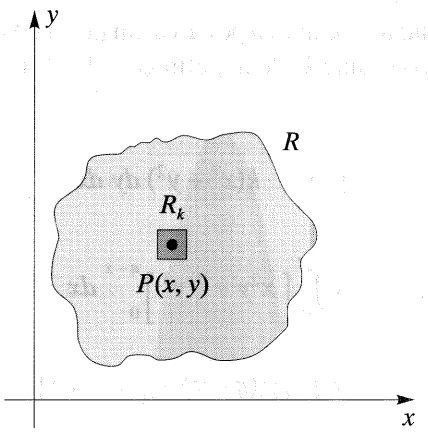



Figura 17.48

$$m = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h kz\, dz\, dy\, dx$$

$$= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^h dy\, dx$$

$$= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \tfrac{1}{2}h^2\, dy\, dx$$

$$= 4k\cdot\tfrac{1}{2}h^2\int_0^a \left[y\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= 2kh^2\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$= 2kh^2\cdot\tfrac{1}{4}\pi a^2 = \tfrac{1}{2}\pi k h^2 a^2$$

Discussão análoga à precedente vale para uma lâmina com a forma de uma região $R$ do plano-$xy$. Consideremos uma sub-região retangular $R_k$ que contenha o ponto $P$ e tenha área $\Delta A_k$ (ver Figura 17.48). Neste caso, a **densidade de massa por área** em $P(x, y)$ é definida por

$$\delta(x, y) = \lim_{\|\Delta A_k\| \to 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta A_k}$$

As unidades de $\delta(x, y)$ são *massa por unidade de área*, como kg/m$^2$. Vale para uma lâmina de fórmula análoga a (17.22):

**Massa de uma lâmina (17.23)**

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$$

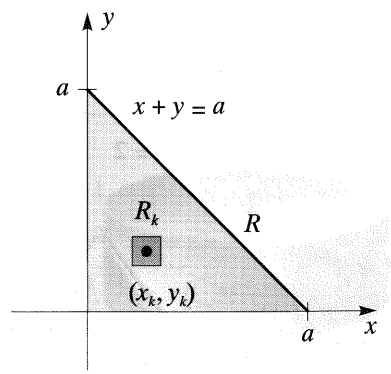



Figura 17.49

## EXEMPLO 7

Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento $a$. Ache a massa, se a densidade de massa por área em um ponto $P$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância de $P$ ao vértice oposto à hipotenusa.

## SOLUÇÃO

É conveniente introduzir um sistema coordenado como o da Figura 17.49, com o vértice na origem e a hipotenusa do triângulo ao longo da reta $x + y = a$. A figura exibe também um retângulo típico $R_k$ (de área $\Delta A_k$) de uma partição interior com um ponto $(x_k, y_k)$ no retângulo.

Por hipótese, a densidade de massa por área em $(x, y)$ é $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ para uma constante $k$. Pela Definição (17.23) e o Teorema (17.8), a massa é

$$m = \iint_R k(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= k \int_0^a \left[ x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 \right]_0^{a-x} dx$$

$$= k \int_0^a [x^2(a-x) + \tfrac{1}{3}(a-x)^3]\, dx$$

A última integral é igual a $\frac{1}{6} ka^4$.

## EXERCÍCIOS 17.5

**Exercs. 1-6:** Calcule a integral iterada.

**1** $\int_0^3 \int_{-1}^0 \int_1^2 (x + 2y + 4z)\, dx\, dy\, dz$

**2** $\int_0^1 \int_{-1}^2 \int_1^3 (6x^2 z + 5xy^2)\, dz\, dx\, dy$

**3** $\int_0^1 \int_{x+1}^{2x} \int_z^{x+z} x\, dy\, dz\, dx$

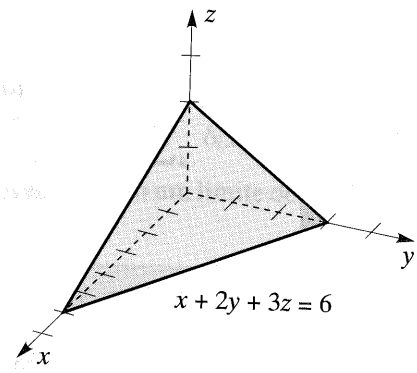
**4** $\int_1^2 \int_0^{z^2} \int_{x+z}^{x-z} z\, dy\, dx\, dz$

**5** $\int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y\, dz\, dy\, dx$

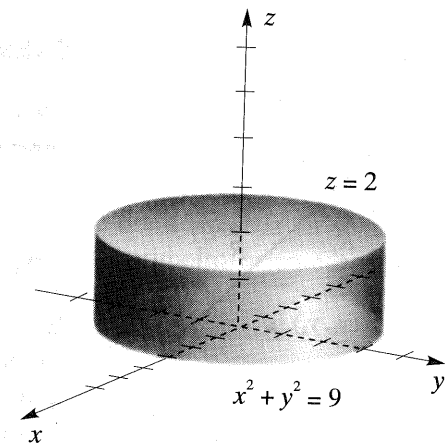
**6** $\int_2^3 \int_0^{3y} \int_1^{yz} (2x + y + z)\, dx\, dz\, dy$

**Exercs. 7-10:** Se $f$ é uma função contínua arbitrária de três variáveis e $Q$ é a região exibida na figura, expresse $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ como uma integral tripla iterada de seis maneiras diferentes.

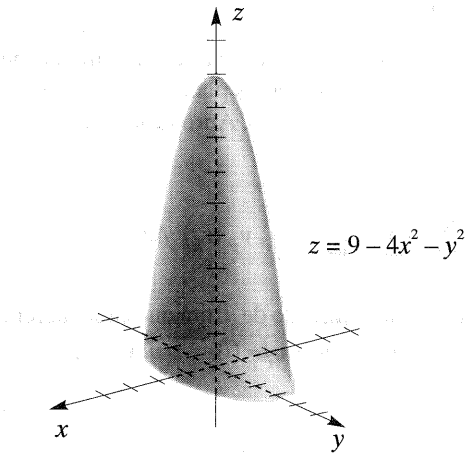
**7**



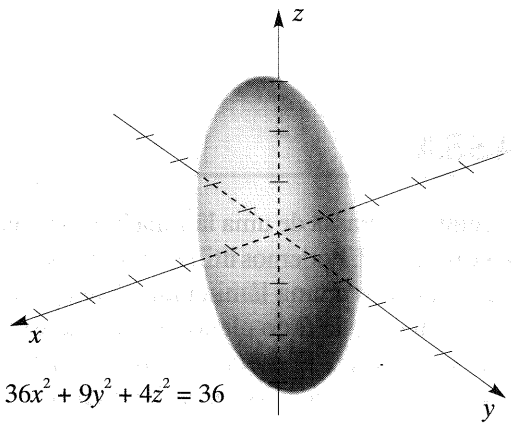

**8**



**9**




**10**




**Exercs. 11-20:** Esboce a região delimitada pelos gráficos das equações, e use uma integral tripla para achar seu volume.

**11** $z + x^2 = 4$, $y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$

**12** $x^2 + z^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$

**13** $y = 2 - z^2$, $y = z^2$, $x + z = 4$, $x = 0$

**14** $z = 4y^2$, $z = 2$, $x = 2$, $x = 0$

**15** $y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 2$, $x = 0$

**16** $z = x^2 + y^2$, $y + z = 2$

**17** $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = -1$, $y = 2$

**18** $z = e^{x+y}$, $y = 3x$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$

**19** $z = x^2$, $z = x^3$, $y = z^2$, $y = 0$

**20** $y = x^2 + z^2$, $z = x^2$, $z = 4$, $y = 0$

**Exercs. 21-22:** Sejam $a$, $b$ e $c$ números positivos.

**21** Ache o volume do tetraedro delimitado pelos planos coordenados e o plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

**22** Ache o volume do sólido delimitado pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**Exercs. 23-28:** A integral iterada representa o volume de uma região $Q$ em um sistema coordenado $xyz$. Descreva $Q$.

**23** $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dx\ dy\ dz$

**24** $\displaystyle\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy\ dx\ dz$

**25** $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz\ dy\ dx$

**26** $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{3x} \int_0^{xy} dz\ dy\ dx$

**27** $\displaystyle\int_1^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy\ dx\ dz$

**28** $\displaystyle\int_1^4 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx\ dy\ dz$

**Exercs. 29-30:** Uma lâmina com densidade de massa por área $\delta(x, y)$ tem a forma da região delimitada pelos gráficos das equações. Estabeleça uma integral tripla iterada para achar a massa da lâmina.

**29** $\delta(x, y) = y^2$; $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

**30** $\delta(x, y) = x^2 + y^2$; $xy^2 = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

**Exercs. 31-32:** Um sólido de densidade $\delta(x, y, z)$ tem a forma da região delimitada pelos gráficos das equações. Estabeleça uma integral tripla iterada para calcular a massa do sólido.

**31** $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$; $x + 2y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

**32** $\delta(x, y, z) = z + 1$; $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$

**33** Próximo do nível do mar, a densidade $\delta$ da atmosfera terrestre a uma altura de $z$ metros pode ser aproximada por $\delta = 1{,}225 - 0{,}000113z$ kg/m$^3$. Aproxime a massa de uma região da atmosfera que

tenha a forma de um cubo com 1 quilômetro de aresta e uma das faces apoiada na superfície da terra.

C **34** Para uma altitude $z$ de até 30.000 metros, a densidade $\delta$ (em kg/m$^3$) da atmosfera terrestre pode ser aproximada por $\delta = 1{,}2 - (1{,}096 \times 10^{-4})z + (3{,}42 \times 10^{-9})z^2 - (3{,}6 \times 10^{-14})z^3$.

A pressão média $P$ (em newtons) em uma região da superfície da terra de área $A$ causada pelo volume $Q$ da atmosfera pode ser estimada por

$$P = \frac{1}{A} \iiint_Q \delta g \, dV$$

em que $g = 9{,}80$ m/seg$^2$ é uma constante gravitacional. Estime a pressão exercida por uma coluna de ar de 30.000 metros de altura sobre um metro quadrado da superfície terrestre. (A pressão atmosférica padrão sobre um metro quadrado é 101.325 newtons).

C **Exercs. 35-36:** Um sólido cúbico delimitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = y = z = 1$ tem a densidade dada $\delta(x, y, z)$. Aproxime sua massa calculando

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta(u_i, v_j, w_k) \, \Delta z_k \, \Delta y_j \, \Delta x_i$$

para o valor indicado de $n$, em que cada incremento é igual a $1/n$ e $u_i = (i - \frac{1}{2})/n$, $v_j = (j - \frac{1}{2})/n$, e $w_k = (k - \frac{1}{2})/n$.

**35** $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$; $n = 2$

**36** $\delta(x, y, z) = \tan(xy \cos z)$; $n = 4$

## 17.6 MOMENTOS E CENTROS DE MASSA

Os momentos e o centro de massa de uma lâmina homogênea já foram abordados na Seção 6.7. Podemos utilizar integrais duplas para estender esses conceitos a uma lâmina *não-homogênea* $L$ que tenha a forma de uma região $R$ do plano-$xy$. Se a densidade de massa por área no ponto $(x, y)$ é $\delta(x, y)$ e $\delta$ é uma função contínua em $R$, então, por (17.23), a massa $m$ de $L$ é dada por

$$m = \iint_R \delta(x, y) \, dA$$

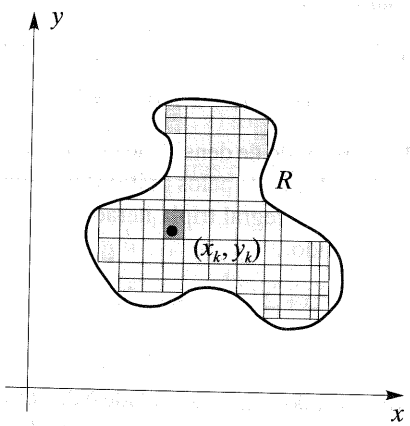



**Figura 17.50**

Seja uma partição interior $P = \{R_k\}$ de $R$ e, para cada $k$, seja $(x_k, y_k)$ um ponto arbitrário de $R_k$ (ver Figura 17.50). Como $\delta$ é contínua, uma pequena variação em $(x, y)$ acarreta uma pequena variação na densidade $\delta(x, y)$, isto é, $\delta$ é *quase constante* em $R_k$. Logo, se $\|P\| \approx 0$, a massa $\Delta m_k$ que corresponde a $R_k$ pode ser aproximada por $\delta(x_k, y_k) \, \Delta A_k$, em que $\Delta A_k$ é a área de $R_k$. Admitindo a massa $\Delta m_k$ concentrada em $(x_k, y_k)$, então o momento deste elemento de $L$ em relação ao eixo-$x$ é o produto $y_k \delta(x_k, y_k) \, \Delta A_k$. Como a soma dos momentos $\sum_k y_k \delta(x_k, y_k) \, \Delta A_k$ deve aproximar-se do momento da *lâmina*, definimos o momento $M_x$ de $L$ em relação ao eixo-$x$ como segue:

$$M_x = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k y_k \delta(x_k, y_k) \, \Delta A_k = \iint_R y \delta(x, y) \, dA$$

Da mesma forma, o momento $M_y$ de $L$ em relação ao eixo-$y$ é

$$M_y = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k x_k \delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$$

Tal como na Definição (6.24), definimos o centro de massa (ou centro de gravidade) da lâmina como o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$.

Isto nos dá:

**Definição (17.24)**

Seja $L$ uma lâmina com a forma de uma região $R$ do plano-$xy$. Se a densidade de massa por área em $(x, y)$ é $\delta(x, y)$ e se $\delta$ é contínua em $R$, então a **massa** $m$, os **momentos** $M_x$ e $M_y$ e o **centro de massa** $(\bar{x}, \bar{y})$ são

**(i)** $m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$

**(ii)** $M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA, \quad M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$

**(iii)** $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{\iint_R x\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}, \quad \bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{\iint_R y\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}$

Se $L$ é homogênea, então a densidade de massa por área $\delta(x, y)$ é constante e pode ser cancelada em (17.24)(iii).

Assim, como na Seção 6.7, o centro de massa de uma lâmina homogênea depende apenas de sua forma; $(\bar{x}, \bar{y})$ é o centróide da região $R$.

## EXEMPLO 1

Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento $a$. A densidade de massa por área no ponto $P$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância de $P$ ao vértice oposto à hipotenusa. Ache o centro de massa.

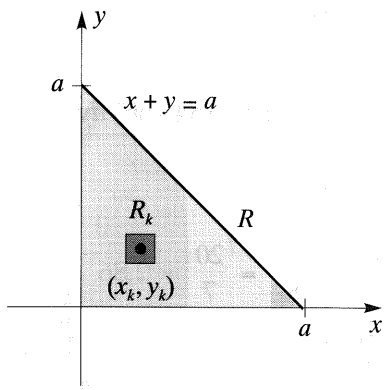



**Figura 17.51**

## SOLUÇÃO

A lâmina é a mesma que a do Exemplo 7 da Seção 17.5, em que colocamos o triângulo conforme a Figura 17.51. Utilizando a densidade de massa por área $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ obtivemos $m = \frac{1}{6}ka^4$. Pela Definição (17.24)(ii),

$$M_y = \iint_R xk(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} xk(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

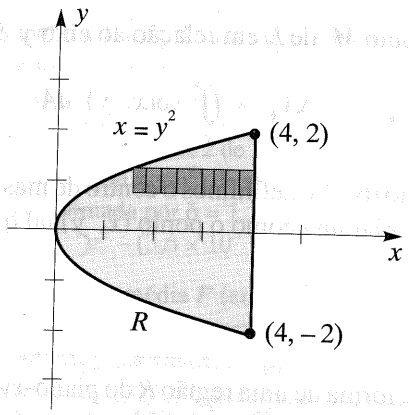



**Figura 17.52**

que é igual a $\frac{1}{15}ka^5$. Pela Definição (17.24)(iii),

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{15}ka^5}{\frac{1}{6}ka^4} = \frac{2}{5}a$$

Analogamente, $M_x = \frac{1}{15}ka^5$ e $\bar{y} = \frac{2}{5}a$. Assim, o centro de massa (*ponto de equilíbrio*) da lâmina é $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

## EXEMPLO 2

Uma lâmina tem a forma da região $R$ do plano-$xy$ delimitada pela parábola $x = y^2$ e a reta $x = 4$. A densidade de massa por área no ponto $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-$y$ a $P$. Ache o centro de massa.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.52 ilustra a região. Por hipótese, a densidade de massa por área em $(x, y)$ é $\delta(x, y) = kx$ para uma constante $k$. Segue-se, da forma de $\delta$ e da simetria da região, que o centro de massa está sobre o eixo-$x$, isto é, $\bar{y} = 0$.

Pela Definição (17.24)(i) e integrando primeiro em relação a $x$, conforme indicado pela linha de retângulos na Figura 17.52, temos

$$m = \iint_R kx\, dA = k\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} x\, dx\, dy$$

$$= k\int_{-2}^{2}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{y^2}^{4} dy = \tfrac{1}{2}k\int_{-2}^{2}(16 - y^4)\, dy = \tfrac{128}{5}k$$

Pela Definição (17.24)(ii),

$$M_y = \iint_R x(kx)\, dA = k\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} x^2\, dx\, dy$$

$$= k\int_{-2}^{2}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{y^2}^{4} dy = \tfrac{1}{3}k\int_{-2}^{2}(64 - y^6)\, dy = \tfrac{512}{7}k$$

Conseqüentemente,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{512k}{7}\cdot\frac{5}{128k} = \frac{20}{7} \approx 2{,}86$$

Logo, o centro de massa é $(\frac{20}{7}, 0)$.

Os momentos $M_x$ e $M_y$ na Definição (17.24) são também chamados *primeiros momentos* de $L$ em relação aos eixos coordenados. Tomando os *quadrados* das distâncias dos eixos coordenados, obtemos os *segundos momentos*, ou **momentos de inércia**, $I_x$ e $I_y$ em relação ao eixo-$x$ e ao eixo-$y$, respectivamente. A soma $I_0 = I_x + I_y$ é o **momento polar de inércia**, ou **momento de inércia em relação à origem**. Na fórmula seguinte, $I_0$ pode ser obtido como limite de uma soma, utilizando-se o *quadrado* da distância da origem a $(x_k, y_k)$ na Figura 17.50.

**Momentos de inércia de uma lâmina (17.25)**

$$I_x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k y_k^2 \delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R y^2 \delta(x, y)\, dA$$

$$I_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k x_k^2 \delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R x^2 \delta(x, y)\, dA$$

$$I_O = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k (x_k^2 + y_k^2) \delta(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R (x^2 + y^2) \delta(x, y)\, dA$$

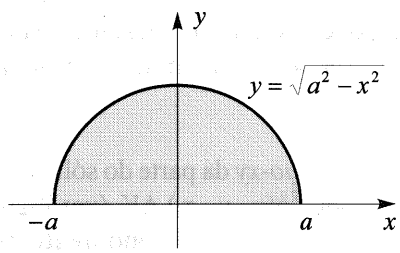



**Figura 17.53**

## EXEMPLO 3

Uma lâmina tem a forma semicircular da Figura 17.53. A densidade de massa por área é diretamente proporcional à distância do eixo-$x$. Ache o momento de inércia em relação ao eixo-$x$.

## SOLUÇÃO

Por hipótese, a densidade de massa por área em $(x, y)$ é $\delta(x, y) = ky$. Aplicando (17.25), vemos que o momento de inércia em relação ao eixo-$x$ é

$$I_x = \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2 (ky)\, dy\, dx = k \int_{-a}^{a} \left[ \tfrac{1}{4} y^4 \right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \tfrac{1}{4} k \int_{-a}^{a} (a^4 - 2a^2x^2 + x^4)\, dx = \tfrac{4}{15} ka^5$$

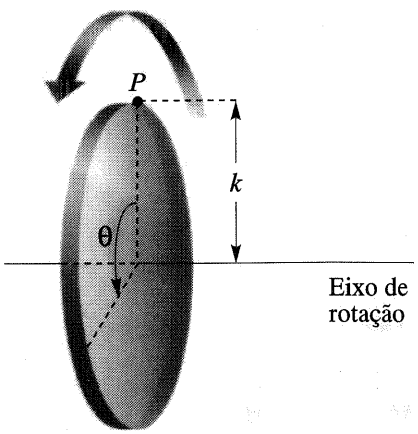



**Figura 17.54**

Os momentos de inércia são úteis em problemas que envolvem a rotação de um objeto em torno de um eixo fixo, como, por exemplo, a rotação de uma roda (ou um disco) em torno de um eixo (ver Figura 17.54). Se uma partícula $P$ da roda tem massa $m$ e está a uma distância $k$ do eixo de rotação, então o momento de inércia $I$ de $P$ em relação ao eixo é $mk^2$. Se a velocidade

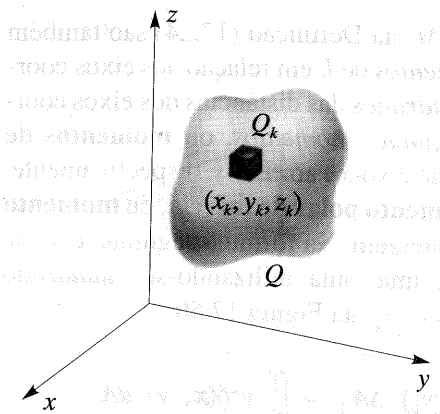



**Figura 17.55**

angular $d\theta/dt$ é uma constante $\omega$, então a velocidade $v$ da partícula é $k\omega$. Da física, sabemos que a **energia cinética** EC de $P$ é

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2} mv^2$$

Como $v = k\,\omega$,

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2} m\, k^2\, \omega^2 = \frac{1}{2} I\, \omega^2$$

Representando a roda por um disco e introduzindo um limite de somas, pode-se deduzir a mesma fórmula para a energia cinética da roda. A fórmula pode aplicar-se também a lâminas de forma não circular. A energia cinética de um objeto em rotação indica ao engenheiro ou ao físico a quantidade de trabalho necessária para fazer parar o objeto. Como EC $= \frac{1}{2} I\omega^2$, *a energia cinética é diretamente proporcional ao momento de inércia*. Para $\omega$ fixo, quanto maior o momento de inércia, maior a quantidade de trabalho necessária para cessar a rotação.

Consideremos agora um sólido com a forma de uma região tridimensional $Q$. Suponhamos que a densidade de massa (massa por unidade de volume) em $(x, y, z)$ seja $\delta(x, y, z)$ e que $\delta$ seja contínua em toda $Q$. Seja $\{Q_k\}$ uma partição interior de $Q$, e seja $\Delta V_k$ o volume de $Q_k$. Se $(x_k, y_k, z_k)$ é um ponto de $Q_k$ (ver Figura 17.55), então a massa correspondente é aproximadamente $\delta(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$. Por (17.22), a massa do sólido é o limite de tais somas – isto é, $\iiint_Q \delta(x, y, z)\, dV$.

O *momento em relação ao plano-xy* da parte do sólido que corresponde $Q_k$ é aproximado por $z_k\delta(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$ (ver Figura 17.55). Somando e tomando limite, obtemos o **momento $M_{xy}$ do sólido em relação ao plano-xy** (ver (17.26)(ii)). Os **momentos $M_{xz}$ e $M_{yz}$ em relação aos planos *xz* e *yz***, respectivamente, obtêm-se de maneira análoga. O **centro de massa** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ do sólido se define em (17.26)(iii).

**Momentos e centros de massa em três dimensões (17.26)**

**(i)** $$m = \iiint_Q \delta(x, y, z)\, dV$$

**(ii)** $$M_{xy} = \iiint_Q z\delta(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y\delta(x, y, z)\, dV$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x\delta(x, y, z)\, dV$$

**(iii)** $$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m};\quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m};\quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

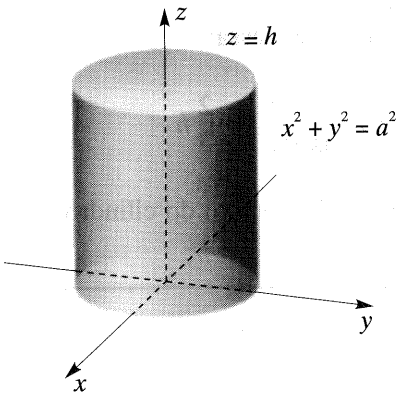



**Figura 17.56**

Por (iii) de (17.26),

$$m\bar{x} = M_{yz}, \quad m\bar{y} = M_{xz}, \quad m\bar{z} = M_{xy}$$

Como $m\bar{x}$, $m\bar{y}$, $m\bar{z}$ são os momentos, em relação aos planos $yz$, $xz$ e $xy$, respectivamente, de um ponto de massa localizado em $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, podemos interpretar o centro de massa de um sólido como o ponto em que a massa total pode concentrar-se para originar os momentos $M_{yz}$, $M_{xz}$ e $M_{xy}$ do sólido.

Se o sólido é homogêneo, a densidade de massa $\delta$ é constante e, assim, $\delta$ pode ser cancelada após substituição em (17.26)(iii). Conseqüentemente, o centro de massa de um sólido homogêneo depende somente da forma de $Q$. Tal como em duas dimensões, o ponto correspondente para sólidos geométricos é chamado **centróide** do sólido. Para achar o centróide, fazemos $\delta(x, y, z) = 1$ em (17.26).

## EXEMPLO 4

Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto de raio da base $a$ e altura $h$. A densidade em um ponto $P$ é diretamente proporcional à distância de uma das bases a $P$. Ache o centro de massa.

## SOLUÇÃO

No Exemplo 6 da Seção 17.5 situamos o sólido como na Figura 17.56. Com $\delta(x, y, z) = kz$, obtivemos $m = \frac{1}{2}\pi k h^2 a^2$.

O centro de massa está no eixo-$z$, de modo que basta achar $\bar{z} = M_{xy}/m$. Além disso, em razão da forma de $\delta$ e da simetria do sólido, podemos calcular $M_{xy}$ para a parte do primeiro octante e multiplicar por 4. Utilizando (17.26), temos

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z(kz)\, dz\, dy\, dx \\
&= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h dy\, dx \\
&= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{h^3}{3}\, dy\, dx \\
&= \tfrac{4}{3}kh^3 \int_0^a \left[y\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
&= \tfrac{4}{3}kh^3 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx \\
&= \tfrac{4}{3}kh^3 \cdot \tfrac{1}{4}\pi a^2 = \tfrac{1}{3}\pi k h^3 a^2
\end{aligned}$$

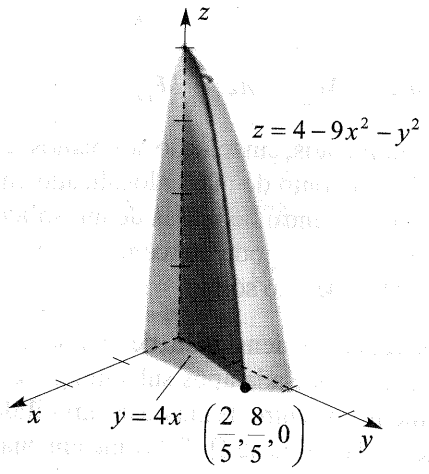



**Figura 17.57**

Finalmente, calculamos o centro de massa:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{3}\pi k h^3 a^2}{\frac{1}{2}\pi k h^2 a^2} = \frac{2}{3}h$$

Logo, o centro de massa está sobre o eixo do cilindro, a dois terços da distância da base inferior.

## EXEMPLO 5

Um sólido tem a forma da região do primeiro octante delimitada pelo parabolóide $z = 4 - 9x^2 - y^2$ e os planos $y = 4x$, $z = 0$ e $y = 0$. A densidade em $P(x, y, z)$ é proporcional à distância da origem a $P$. Estabeleça integrais iteradas para calcular $\bar{x}$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.57 ilustra a região. A densidade em $(x, y, z)$ é $\delta(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ para algum $k$. (17.26) nos dá

$$m = \int_0^{8/5} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^2}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\, dz\, dx\, dy$$

$$M_{yz} = \int_0^{8/5} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^2}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} xk(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\, dz\, dx\, dy$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$$

Se uma partícula de massa $m$ está no ponto $(x, y, z)$, então sua distância ao eixo-$z$ é $(x^2 + y^2)^{1/2}$ e seu **momento de inércia $I_z$ em relação ao eixo-$z$** define-se como $(x^2 + y^2)m$. Da mesma forma, **os momentos de inércia $I_x$ e $I_y$ em relação aos eixos $x$ e $y$** são $(y^2 + z^2)m$ e $(x^2 + z^2)m$, respectivamente. Para sólidos com a forma de $Q$ na Figura 17.55, empregamos limites de somas na maneira usual para obter o seguinte.

**Momentos de inércia de sólidos (17.27)**

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)\, dV$$

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)\, dV$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)\, dV$$

## EXEMPLO 6

Ache o momento de inércia, em relação ao eixo de simetria, do sólido cilíndrico descrito no Exemplo 4.

## SOLUÇÃO

O sólido está esboçado na Figura 17.56. Utilizando (17.27) com $\delta(x, y, z) = kz$ e lançando mão da simetria e do fato de que $\delta$ é uma função de $z$ somente, temos

$$I_z = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h (x^2+y^2)\, kz\, dz\, dy\, dx$$

$$= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h dy\, dx$$

$$= 2kh^2\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= 2kh^2\int_0^a \left[x^2y + \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= 2kh^2\int_0^a \left[x^2\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}\right] dx$$

A última integral pode ser calculada por substituição trigonométrica ou com auxílio de uma tábua de integrais. O resultado é $I_z = \frac{1}{4}\pi kh^2a^4$.

## EXEMPLO 7

Um sólido homogêneo tem a forma da região $Q$ delimitada pelo cone $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e o plano $y = 3$. Estabeleça uma integral tripla para calcular seu momento de inércia em relação ao eixo-$y$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.58 ilustra a região. Note que o traço do cone no plano-$xy$ é o par de retas $x = \pm y$. Denotando por $k$ a densidade constante, e aplicando (17.27), temos

$$I_y = \int_0^3 \int_{-y}^{y} \int_{-\sqrt{y^2-x^2}}^{\sqrt{y^2-x^2}} (x^2+z^2)\, k\, dz\, dx\, dy$$

Poderíamos também achar $I_y$ multiplicando por 4 o momento de inércia da parte do sólido que está no primeiro octante. Assim,

$$I_y = 4\int_0^3 \int_0^{y} \int_0^{\sqrt{y^2-x^2}} (x^2+z^2)\, k\, dz\, dx\, dy$$

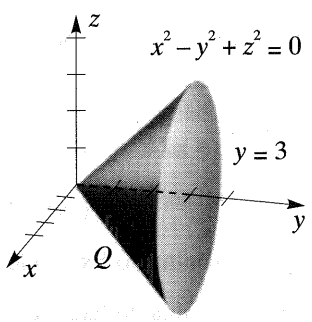



**Figura 17.58**

Concluiremos esta seção com uma demonstração do seguinte teorema, enunciado sem prova em (6.26).

**Teorema de Pappus (17.28)**

Seja $R$ uma região de um plano situada inteiramente a um lado de uma reta $l$ do plano. Fazendo $R$ revolver uma vez em torno de $l$, o volume do sólido resultante é o produto da área de $R$ pela distância percorrida pelo centróide de $R$.

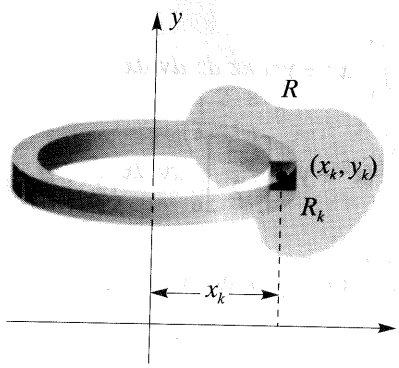



**Figura 17.59**

## DEMONSTRAÇÃO

Podemos admitir que $l$ seja o eixo-$y$ e $R$ uma região no primeiro quadrante, conforme Figura 17.59. Seja $\{R_k\}$ uma partição interior $P$ de $R$, e denotemos por $\Delta A_k$ a área de $R_k$. Para cada $k$, escolhamos $(x_k, y_k)$ como centro do retângulo $R_k$.

Fazendo $R$ revolver em torno do eixo-$y$, então, conforme Figura 17.59, $R_k$ gera uma casca cilíndrica de volume $2\pi x_k \Delta A_k$. Assim, o volume $V$ do sólido gerado por $R$ é

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k 2\pi x_k \, \Delta A_k = \iint_R 2\pi x \, dA$$

Se aplicarmos a Definição (17.24) aos centróides, tomando $\delta(x, y) = 1$ e $m = A$, então

$$V = 2\pi \iint_R x \, dA = 2\pi M_y = 2\pi \bar{x} A$$

Podemos, assim, achar o volume $V$ multiplicando a área $A$ de $R$ pela distância $2\pi\bar{x}$ percorrida pelo centróide quando $R$ revolve uma vez em torno do eixo-$y$.

## EXERCÍCIOS 17.6

**Exercs. 1-8:** Ache a massa e o centro de massa da lâmina que tem a forma da região delimitada pelos gráficos das equações dadas e a densidade massa por área indicada.

**1** $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$; $\delta(x, y) = x + y$

**2** $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $y = 0$; $\delta(x, y) = y^2$

**3** $y = x^2$, $y = 4$;

a densidade em $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-$y$ a $P$.

**4** $y = x^3$, $y = 2x$;

a densidade em $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-$x$ a $P$.

**5** $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$; $\delta(x, y) = |xy|$

**6** $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$; $\delta(x, y) = y$

**7** $y = \sec x$, $x = -\pi/4, x = \pi/4$, $y = \frac{1}{2}$; $\delta(x, y) = 4$

**8** $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$; $\delta(x, y) = 1/x$

**9** Ache $I_x$, $I_y$ e $I_O$ para a lâmina do Exercício 1.

**10** Ache $I_x$, $I_y$ e $I_O$ para a lâmina do Exercício 2.

**11** Ache $I_x$, $I_y$ e $I_O$ para a lâmina do Exercício 3.

**12** Ache $I_x$, $I_y$ e $I_O$ para a lâmina do Exercício 4.

**13** Uma lâmina homogênea tem a forma de um quadrado de lado $a$. Ache o momento de inércia em relação a

(a) um lado (b) uma diagonal

(c) centro de massa

**14** Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo eqüilátero de lado $a$. Ache o momento de inércia em relação a: (a) uma altura, (b) um lado, (c) um vértice.

**15** Se um sólido de massa $m$ tem momento de inércia $I$ em relação a uma reta, então o *raio de giração* é, por definição, o número $d$ tal que $I = md^2$. Esta fórmula implica que o raio de giração é a distância da reta em que toda a massa se concentraria *sem alterar* o momento de inércia do sólido. Ache o raio de giração em (a) do Exercício 13.

**16** Ref. Exercício 15. Ache o raio de giração em (a) do Exercício 14.

**Exercs. 17-18:** Ache o centro de massa de $Q$.

**17** A densidade de um ponto $P$ de um sólido cúbico $Q$ de aresta $a$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância de $P$ a um vértice fixo do cubo.

**18** Seja $Q$ o tetraedro delimitado pelos planos coordenados e o plano $2x + 5y + z = 10$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do plano $xz$ a $P$.

**Exercs. 19-20:** Estabeleça integrais iteradas para calcular o centro de massa do sólido que tem a forma da região $Q$ e densidade $\delta(x, y, z)$.

**19** $Q$ é delimitada pelo parabolóide $x = y^2 + 4z^2$ e o plano $x = 4$; $\delta(x, y, z) = x^2 + z^2$.

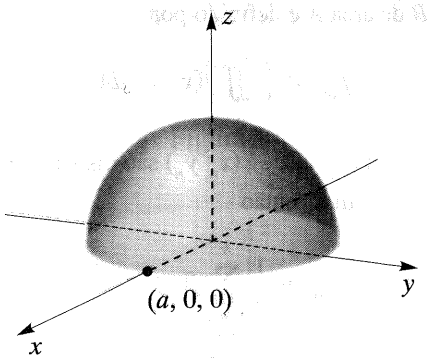
**20** $Q$ é delimitada pelo hiperbolóide $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ e o plano $y = 2$; $\delta(x, y, z) = x^2y^2z^2$.

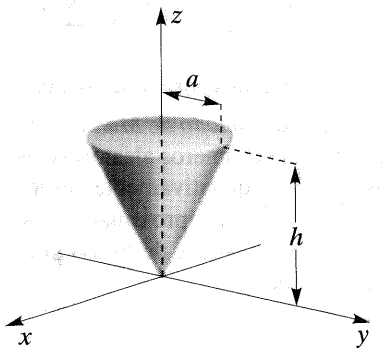
**21** Seja $Q$ o sólido no primeiro octante delimitado pelos planos coordenados e pelos gráficos de $z = 9 - x^2$ e $2x + y = 6$.

(a) Estabeleça integrais iteradas para achar o centróide.

(b) Ache o centróide.

**Exercs. 22-23:** Estabeleça integrais iteradas para achar o centróide do sólido exibido nas figuras.




**24** Estabeleça integrais iteradas para achar o centróide do sólido delimitado pelos gráficos de $z = x^2$, $y = x^2$, $y = x^3$ e $z = 0$.

**Exercs. 25-28:** Estabeleça uma integral iterada para achar o momento de inércia em relação ao eixo-$z$ do sólido indicado.

**25** A esfera de raio $a$ e centro na origem;

$$\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

**26** O cone delimitado pelos gráficos de

$$x^2 + 9y^2 - z^2 = 0 \text{ e } z = 36;\ \delta(x, y, z) = x^2 + y^2$$

**27** O tetraedro homogêneo delimitado pelos planos coordenados e o plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ para números positivos $a$, $b$ e $c$.

**28** O sólido homogêneo delimitado pelo elipsóide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$

© **Exercs. 29-30:** O valor médio de $f(x, y)$ em uma região $R$ de área $A$ é definido por

$$f_{av} = \frac{1}{A} \iint_R f(x, y)\, dA$$

Se os pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são distribuídos uniformemente em $R$, então

$$f_{av} \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)$$

e

$$\iint_R f(x, y)\, dA = A \cdot f_{av} \approx \frac{A}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)$$

Se os $(x_k, y_k)$ são gerados por números aleatórios, este processo é chamado *método de Monte Carlo*. (Se sua calculadora não gera números aleatórios, escolha dez pontos distribuídos eqüitativamente em $R$.) Use este método, com $n = 10$, para aproximar a massa de uma lâmina que tem a densidade de massa por área dada $\delta(x, y)$ e a forma de $R$.

**29** $\delta(x, y) = \ln [3 + \text{sen } (xy)]$; $R$ é o quadrado de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 1) e (1, 0).

**30** $\delta(x, y) = 2 + \cos \sqrt[4]{x^2 + y^2}$; $R$ é a região do primeiro quadrante delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 1$ e os eixos coordenados. (Note que, quando $(x_k, y_k)$ é gerado, se $x_k^2 + y_k^2 > 1$ então $(x_k, y_k)$ não está em $R$ e não deve ser usado).

© **Exercs. 31-32:** Estenda o método de Monte Carlo dos Exercícios 29-30 a $f(x, y, z)$ e uma região $Q$ de volume $V$, e use esta extensão, com $n = 10$, para aproximar a massa de um sólido que tem a densidade de massa $\delta(x, y, z)$ dada e a forma de $Q$.

**31** $\delta(x, y, z) = 1 + \text{sen } \sqrt{xyz}$; $Q$ é a região cúbica do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados e os planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.

**32** $\delta(x, y, z) = \ln (2 + \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2})$; $Q$ é a região do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

## 17.7 COORDENADAS CILÍNDRICAS

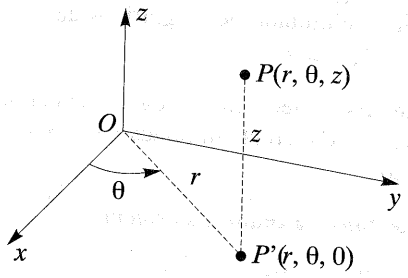



**Figura 17.60**

É fácil estender o sistema de coordenadas polares a três dimensões. Basta representar um ponto $P$ por um terno ordenado $(r, \theta, z)$, em que $z$ é a (terceira) coordenada retangular usual de $P$ e $r$ e $\theta$ são coordenadas polares da projeção $P'$ de $P$ no plano-$xy$, conforme ilustrado na Figura 17.60. $(r, \theta, z)$ são as **coordenadas cilíndricas** de $P$. A principal aplicação das coordenadas cilíndricas consiste em simplificar certos tipos de integrais múltiplas.

Como as coordenadas polares são usadas no plano-$xy$, as fórmulas do Teorema (13.8) dão relações entre coordenadas retangulares e coordenadas cilíndricas. Reestabeleçamos estas fórmulas:

**Teorema (17.29)**

As coordenadas retangulares $(x, y, z)$ e as coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ de um ponto $P$ estão relacionadas a seguir:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \text{ sen } \theta, \quad \text{tg } \theta = \frac{y}{x}$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad z = z$$

Se $r_0 > 0$, então o gráfico da equação $r = r_0$, ou, equivalentemente, $x^2 + y^2 = r_0^2$, é um cilindro circular de raio $r_0$ com eixo ao longo do eixo-$z$. Se $\theta_0$ e $z_0$ são números, então o gráfico de $\theta = \theta_0$ é um plano contendo o eixo-$z$ e o gráfico de $z = z_0$ é um plano perpendicular ao eixo-$z$. A Figura 17.61 ilustra gráficos típicos.

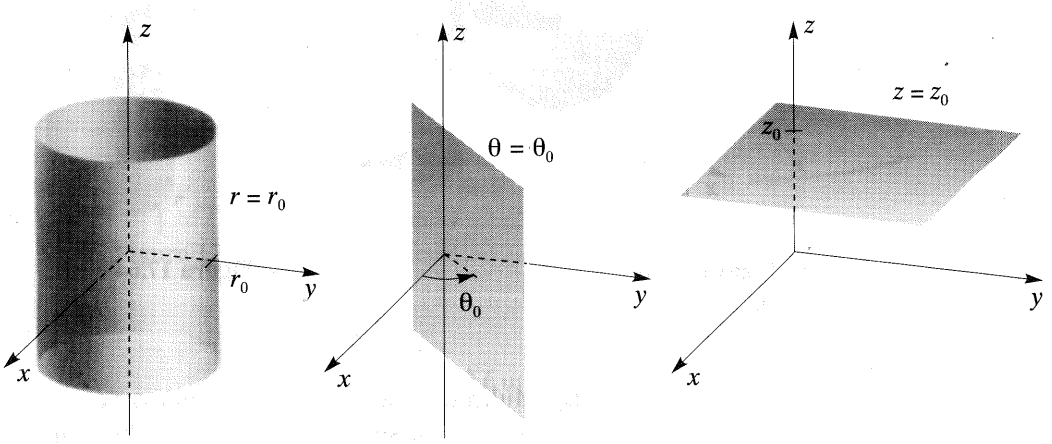



**Figura 17.61**

## EXEMPLO 1

Escreva a equação $z^2 = x^2 + y^2$ em coordenadas cilíndricas e esboce o gráfico.

## SOLUÇÃO

Utilizando o Teorema (17.29), obtemos

$$z^2 = r^2 \qquad \text{ou} \qquad z = \pm r$$

Como $r$ pode ser positivo ou negativo, $z = \pm r$ é equivalente a $z = r$. O gráfico é um cone circular com eixo ao longo do eixo-$z$, ilustrado na Figura 17.62.

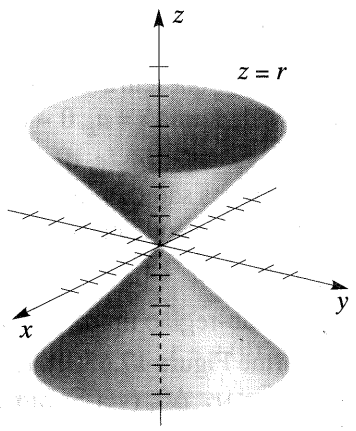



**Figura 17.62**

## EXEMPLO 2

Escreva a equação em coordenadas retangulares e esboce seu gráfico em um sistema coordenado $xyz$:

**(a)** $z = 4r^2$ **(b)** $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

## SOLUÇÃO

**(a)** Aplicando o Teorema (17.29), temos

$$z = 4(x^2 + y^2) \qquad \text{ou} \qquad z = 4x^2 + 4y^2$$

O gráfico é o parabolóide de revolução da Figura 17.63.

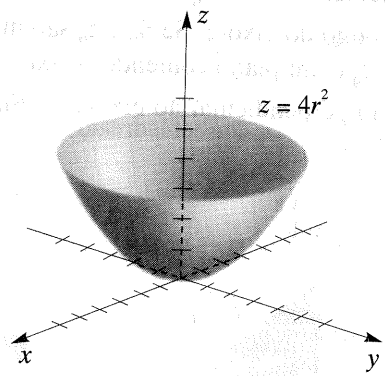



Figura 17.63

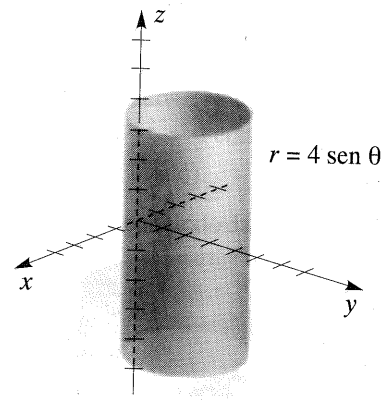



Figura 17.64

**(b)** Multiplicando ambos os membros de $r = 4 \text{ sen } \theta$ por $r$, obtemos $r^2 = 4r \text{ sen } \theta$. Utilizando (17.29), temos $x^2 + y^2 = 4y$, ou, equivalentemente,

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

O gráfico é um cilindro de geratrizes paralelas ao eixo-$z$, exibido na Figura 17.64. Uma diretriz do cilindro é o círculo de raio 2 no plano-$xy$, cujo centro em coordenadas retangulares é (0, 2, 0).

---

Às vezes é conveniente utilizar coordenadas cilíndricas para calcular integrais triplas. O caso mais simples ocorre quando uma função $f$ de $r$, $\theta$ e $z$ é contínua em toda uma região da forma

$$Q = \{(r, \theta, z); a \leq r \leq b, c \leq \theta \leq d, m \leq z \leq n\}$$

Dividimos $Q$ em sub-regiões $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ que têm a mesma forma de $Q$ utilizando gráficos de equações da forma $r = a_k$, $\theta = c_k$ e $z = m_k$, em que $a_k$ $c_k$ e $m_k$ estão nos intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ e $[m, n]$, respectivamente. Se $a_k \neq 0$, estes gráficos são cilíndricos circulares, planos contendo o eixo-$z$ e planos paralelos ao plano-$xy$, respectivamente (ver Figura 17.61).

A Figura 17.65(i) ilustra uma sub-região típica $Q_k$. Se $\overline{r}_k$ é o *raio médio* da base de $Q_k$, conforme Figura 17.65(ii), então o volume $\Delta V_k$ de $Q_k$ é a área da base $\overline{r}_k \ \Delta r_k \ \Delta\theta_k$ (ver Seção 17.3) vezes a altura $\Delta z_k$: $\Delta V_k = \overline{r}_k \ \Delta r_k \ \Delta\theta_k \ \Delta z_k$

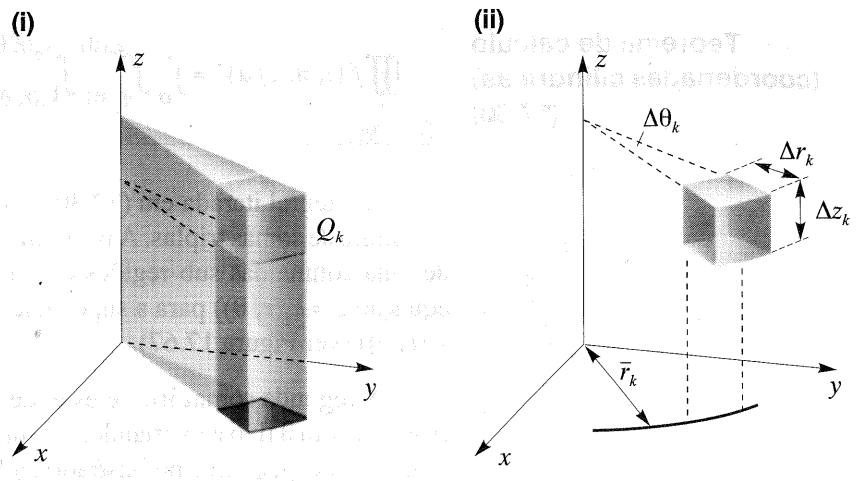



**Figura 17.65**

Se $(r_k, \theta_k, z_k)$ é um ponto arbitrário em $Q_k$ e $\|P\|$ é o comprimento da maior diagonal dos $Q_k$, então a integral tripla de $f$ sobre $Q$ se define como

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(r_k, \theta_k, z_k)\, \Delta V_k$$

Pode-se provar que

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(r, \theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz$$

Há cinco outras ordens possíveis de integração para esta integral iterada.

Por meio de partições interiores, as integrais triplas em coordenadas cilíndricas podem ser definidas sobre regiões mais complicadas do que a que acabamos de estudar. Assim, se $R$ é uma região polar do tipo abordado na Seção 17.5, e se

$$Q = \{(r, \theta, z);\ (r, \theta) \text{ está em } R \text{ e } k_1(r, \theta) \le z \le k_2(r, \theta)\}$$

em que $k_1$ e $k_2$ são funções dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas em toda $R$, então pode-se mostrar que

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[ \int_{k_1(r, \theta)}^{k_2(r, \theta)} f(r, \theta, z)\, dz \right] dA$$

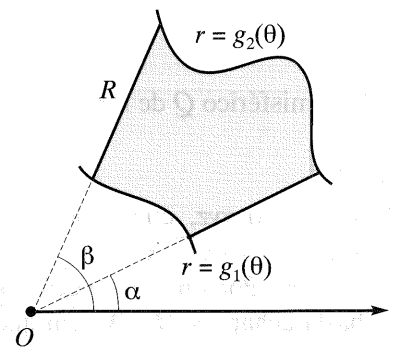



**Figura 17.66**

Em particular, se $R$ é uma região do tipo ilustrado na Figura 17.66, pode-se calcular como a seguir a integral tripla de $f$ sobre $Q$:

**Teorema de cálculo (coordenadas cilíndricas) (17.30)**

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$$

A integral iterada em (17.30) pode ser interpretada como um limite de somas triplas. A primeira somatória se faz ao longo de uma coluna das sub-regiões $Q_k$ da superfície inferior (com equação $z = k_1(r, \theta)$) para a superfície superior (de equação $z = k_2(r, \theta)$) (ver Figura 17.67).

A segunda somatória se estende sobre uma cunha dessas colunas, com $\theta$ fixo e $r$ variando. A esta altura, já somamos sobre uma fatia de $Q$, conforme ilustrado na Figura 17.67. Finalmente, varremos $Q$ fazendo $\theta$ variar de $\alpha$ a $\beta$.

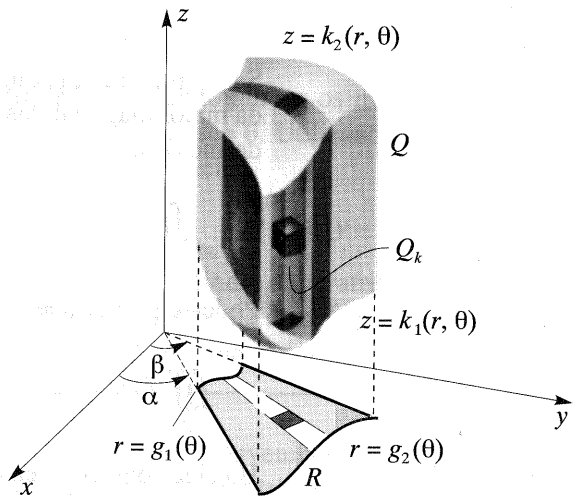



**Figura 17.67**

Os exemplos a seguir ilustram o uso de (17.30).

## EXEMPLO 3

Ache o centróide de um sólido hemisférico $Q$ de raio $a$.

## SOLUÇÃO

Introduzindo um sistema coordenado $xyz$, conforme Figura 17.68, a equação do hemisfério é $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, ou, em coordenadas cilíndricas, $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Por simetria, o centróide está sobre o eixo-$z$ e, assim, basta achar $\bar{z} = M_{xy}/V$, em que o volume $V$ é dado por $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^3$.

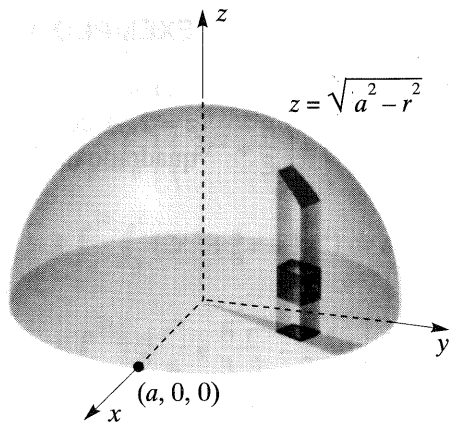



**Figura 17.68**

Utilizando (17.26)(ii) com $\delta(x, y, z) = 1$, obtemos

$$M_{xy} = \iiint_Q z \, dV$$

Aplicando o Teorema (17.30), notamos que a primeira integração (em relação a $z$) vai de $z = 0$ (o plano-$xy$) até o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Esta integração parcial representa o volume da coluna exibida na Figura 17.68. As integrações restantes em relação a $r$ e $\theta$ estendem-se à região delimitada pelo círculo $r = a$. Assim,

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} zr \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr \, d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2) r \, dr \, d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 r - r^3) \, dr \, d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ a^2 \left( \frac{r^2}{2} \right) - \frac{r^4}{4} \right]_0^a d\theta \\
&= \frac{a^4}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{a^4}{8} \left[ \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \pi a^4
\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\frac{1}{4} \pi a^4}{\frac{2}{3} \pi a^3} = \frac{3}{8} a$$

## EXEMPLO 4

Um sólido $Q$ é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância da origem a $P$. Ache sua massa.

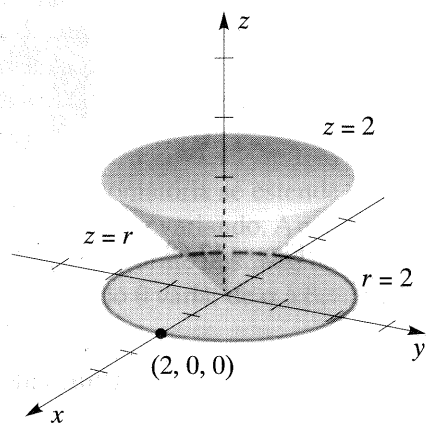



**Figura 17.69**

## SOLUÇÃO

A Figura 17.69 ilustra o sólido. A equação do cone em coordenadas cilíndricas é $z = r$, com $r \geq 0$. Note que, se $z = 2$, então $2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ou $4 = x^2 + y^2$. Portanto o topo do cone se projeta sobre o círculo $x^2 + y^2 = 4$ ou $r = 2$, no plano-$xy$. A densidade em $(x, y, z)$ é dada por

$$\delta = k(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \text{ou} \qquad \delta = k(r^2 + z^2)$$

Por (17.26) e (17.30)

$$m = \iiint_Q \delta \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 k(r^2 + z^2)\, r \, dz \, dr \, d\theta$$

Note que a primeira integração (em relação a $z$) vai do cone $z = r$ (a superfície inferior) ao plano $z = 2$ (a superfície superior). As integrações restantes em relação a $r$ e $\theta$ abrangem a região circular delimitada por $r = 2$. Integrando, obtemos

$$m = k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[ r^2 z + \frac{z^3}{3} \right] r\,dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[ \left( 2r^2 + \frac{8}{3} \right) - \left( r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] r\,dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^3 + \tfrac{8}{3}r - \tfrac{4}{3}r^4)\,dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} \left[ 2\frac{r^4}{4} + \frac{8}{3}\frac{r^2}{2} - \frac{4}{3}\frac{r^5}{5} \right]_0^2 d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} \tfrac{24}{5}\,d\theta = \tfrac{24}{5}k\left[ \theta \right]_0^{2\pi} = \tfrac{48}{5}\pi k$$

## EXEMPLO 5

Um sólido tem a forma da região $Q$ interior ao cilindro $r = a$, interior à esfera $r^2 + z^2 = 4a^2$ e acima do plano-$xy$. A densidade em um ponto $P$ é diretamente proporcional à distância do plano-$xy$ a $P$. Ache a massa e o momento de inércia $I_z$ do sólido.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.70 ilustra a região $Q$, juntamente com uma coluna que corresponde a uma primeira somatória em direção paralela ao eixo-$z$. Como a densidade no ponto $P$ é dada por $kz$, para uma constante $k$, podemos achar a massa $m$ aplicando (17.26)(i), com $\delta(x, y, z) = kz$ e $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$. Assim,

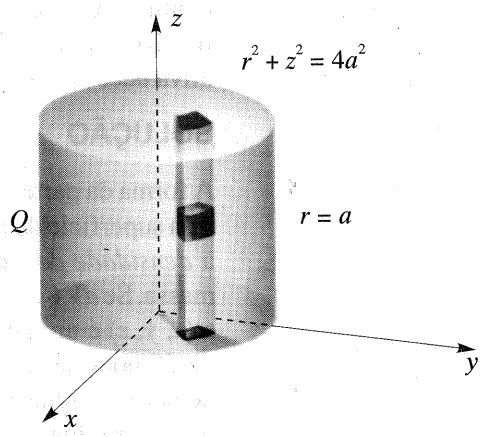



**Figura 17.70**

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} (kz)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(4a^2r - r^3)\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\left[2a^2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{a} d\theta$$

$$= \tfrac{7}{8}a^4k\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{7}{8}a^4k\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \tfrac{7}{4}a^4\pi k$$

Para achar $I_z$, aplicamos (17.27) e utilizamos coordenadas cilíndricas:

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2(kz) r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(4a^2r^3 - r^5)\, dr\, d\theta = \tfrac{5}{6}a^6\pi k$$

## EXEMPLO 6

Uma câmara de vidro será usada em experimentos para testar os efeitos da exposição ao gás radon. A câmara tem a forma do parabolóide $z = 25 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$ e as unidades em centímetros. Se a densidade da energia radioativa deve ser de $6 \times 10^{-11}$ joule/cm$^3$, calcule a quantidade total de energia radioativa necessária na câmara.

## SOLUÇÃO

A forma da parte da câmara no primeiro quadrante é semelhante à da superfície da Figura 17.36. Neste exemplo, $\delta(x, y, z)$ denota a *densidade de energia* em $(x, y, z)$ em lugar da densidade de massa. Se $dV$ é o volume de uma sub-região $dQ$ dentro da câmara e $(x, y, z)$ é um ponto em $dQ$, então a energia radioativa dentro de $dQ$ pode ser aproximada por $\delta(x, y, z)dV$. Tomando um limite de somas triplas com $\delta(x, y, z) = \delta = 6 \times 10^{-11}$, vemos que a energia radioativa total $E$ é dada por

$$E = \iiint_V \delta\, dV$$

Empregando coordenadas cilíndricas, obtemos

$$E = \delta \int_0^{2\pi} \int_0^5 \int_0^{25-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \delta \int_0^{2\pi} \int_0^5 r \left[ z \right]_0^{25-r^2} dr\,d\theta$$

$$= \delta \int_0^{2\pi} \int_0^5 (25r - r^3)\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{625}{2}\pi\delta \approx 5{,}89 \times 10^{-8} \text{ joule}$$

## EXERCÍCIOS 17.7

**Exercs. 1-14:** Descreva o gráfico da equação em três dimensões.

**1** (a) $r = 4$ (b) $\theta = -\pi/2$ (c) $z = 1$

**2** (a) $r = -3$ (b) $\theta = \pi/4$ (c) $z = -2$

**3** $r = -3 \sec\theta$ **4** $r = -\csc\theta$ **5** $z = 4r^2$

**6** $z = 4 - r^2$ **7** $r = 6 \operatorname{sen}\theta$ **8** $r \sec\theta = 4$

**9** $z = 2r$ **10** $3z = r$ **11** $r^2 = 9 - z^2$

**12** $r^2 + z^2 = 16$ **13** $r = 2 \csc\theta \cot\theta$ **14** $r = \operatorname{tg}\theta \sec\theta$

**Exercs. 15-24:** Transforme a equação para coordenadas cilíndricas.

**15** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ **16** $x^2 + y^2 = 4z$

**17** $3x + y - 4z = 12$ **18** $y = x$

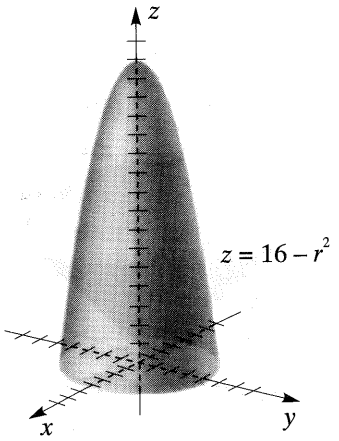
**19** $x^2 = 4 - y^2$ **20** $x^2 + (y-2)^2 = 4$

**21** $x^2 - 4z^2 + y^2 = 0$ **22** $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

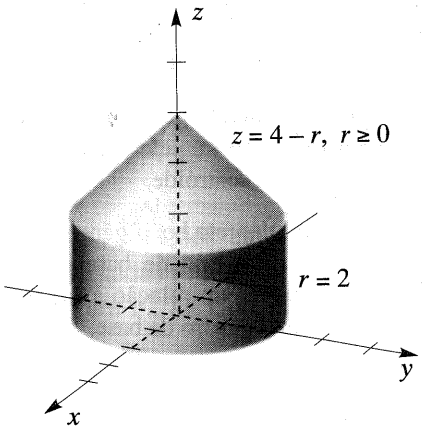
**23** $y^2 + z^2 = 9$ **24** $x^2 + z^2 = 9$

**Exercs. 25-28:** Seja $f$ uma função contínua arbitrária de $r$, $\theta$ e $z$, e seja $Q$ a região ilustrada na figura. Estabeleça uma integral tripla iterada em coordenadas cilíndricas para $\iiint_Q f(r, \theta, z)\,dV$.

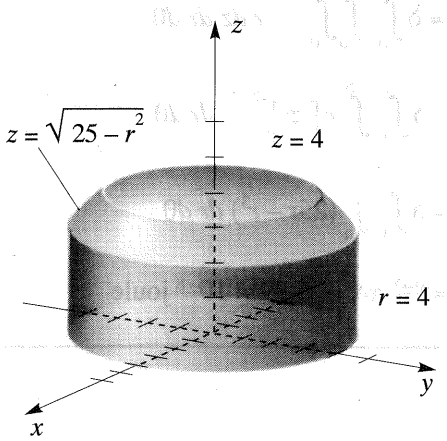
**25**



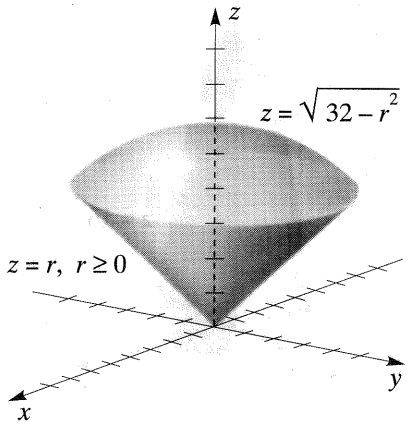

**26**



**27**




**28**




**Exercs. 29-38:** Use coordenadas cilíndricas.

**29** Um sólido é delimitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano-$xy$. Ache (a) seu volume (b) seu centróide.

**30** Um sólido é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano-$xy$. Ache (a) seu volume (b) seu centróide.

**31** Um cilindro circular reto homogêneo de densidade $\delta$ tem altura $h$ e raio de base $a$. Ache seu momento de inércia em relação a (a) o eixo do cilindro e (b) um diâmetro da base.

**32** Um sólido homogêneo de densidade $\delta$ é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$. Ache

(a) seu centro de massa

(b) seu momento de inércia em relação ao eixo-$z$

**33** Um sólido esférico tem raio $a$, e a densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância de $P$ a uma reta fixa $l$ pelo centro do sólido. Ache sua massa.

**34** Um sólido é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 4$, e a densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-$z$ a $P$. Ache sua massa.

**35** Ache o momento de inércia em relação a $l$ para o sólido descrito no Exercício 33.

**36** Ache o momento de inércia em relação ao eixo-$z$ para o sólido descrito no Exercício 34.

**37** Para uma altitude $z$ de até 10.000 metros, a densidade $\delta$ (em kg/m$^3$) da atmosfera terrestre pode ser aproximada por

$$\delta = 1{,}2 - (1{,}05 \times 10^{-4})z + (2{,}6 + 10^{-9})z^2$$

Estime a massa de uma coluna de ar de 10 quilômetros de altura com base circular de 3 metros de raio.

**38** Um sólido é cortado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do plano-$xy$ a $P$. Ache (a) sua massa e (b) seu centro de massa.

**Exercs. 39-40:** Use coordenadas cilíndricas para calcular a integral.

**39** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy$

**40** $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx$

## 17.8 COORDENADAS ESFÉRICAS

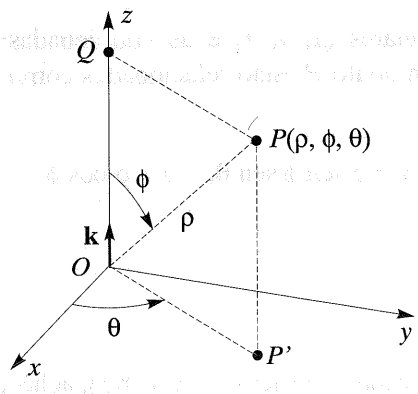



Figura 17.71

Nesta seção estudaremos o **sistema de coordenadas esféricas** em três dimensões. As *coordenadas esféricas* de um ponto $P$ são dadas por um terno ordenado $(\rho, \phi, \theta)$, em que, conforme Figura 17.71, $\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$, $\phi$ é o ângulo entre $\overrightarrow{OP}$ e o vetor $\mathbf{k}$, e $\theta$ é um ângulo polar associado à projeção $P'$ de $P$ sobre o plano-$xy$. O ponto $Q$ é a projeção de $P$ sobre o eixo-$z$. Note que $\rho \geq 0$ e $0 \leq \phi \leq \pi$.

Se $\rho_0 > 0$, o gráfico de $\rho = \rho_0$ é uma esfera de raio $\rho_0$ com centro $O$ (ver Figura 17.72(i)). O gráfico de $\rho = 0$ consiste em um único ponto, a origem.

Se $0 < \phi_0 < \pi$, o gráfico de $\phi = \phi_0$ é um meio-cone de vértice em $O$ (ver Figura 17.72(ii)). O gráfico de $\phi = 0$ é a parte não-negativa do eixo-$z$, e o gráfico de $\phi = \pi$ é a parte não-positiva.

(i) (ii) (iii)

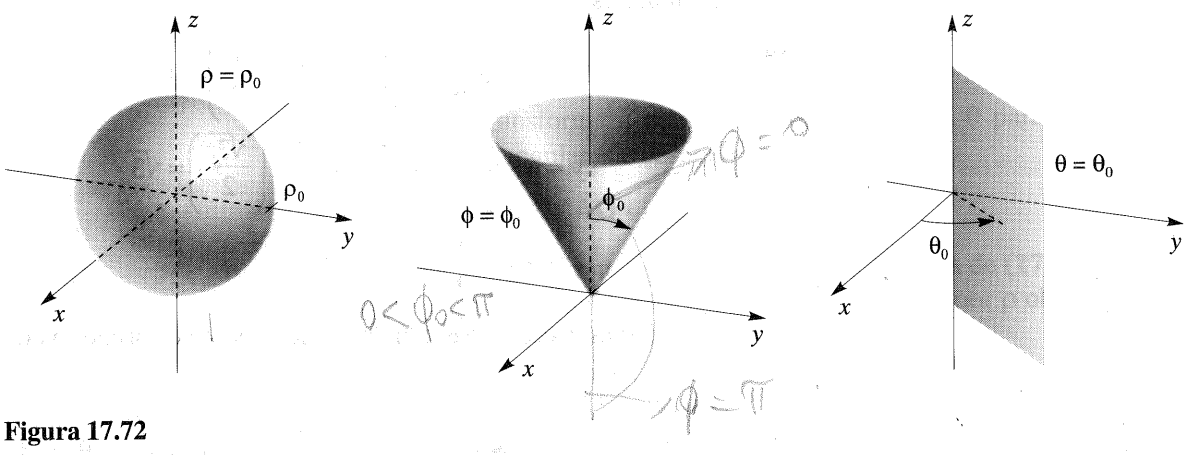



Figura 17.72

O gráfico de $\theta = \theta_0$ é um semiplano contendo o eixo-$z$ (ver Figura 17.72(iii)).

Podemos estabelecer as relações entre as coordenadas esféricas $(\rho, \phi, \theta)$ e as coordenadas retangulares $(x, y, z)$ de um ponto $P$, referindo-nos à Figura 17.71. Considerando que

$$x = \|\overrightarrow{OP}\| \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \|\overrightarrow{OP}\| \operatorname{sen}\theta$$

e que

$$\|\overrightarrow{OP'}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = \rho \operatorname{sen}\phi \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{OQ}\| = \rho \cos\phi$$

temos (i) do próximo teorema. A parte (ii) é conseqüência da fórmula da distância (14.13).

**Teorema (17.31)**

As coordenadas retangulares $(x, y, z)$ e as coordenadas esféricas $(\rho, \phi, \theta)$ de um ponto $P$ estão relacionadas como segue:

**(i)** $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$

**(ii)** $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

## EXEMPLO 1

Se um ponto $P$ tem coordenadas esféricas $(4, \pi/6, \pi/3)$, ache as coordenadas retangulares e cilíndricas de $P$.

## SOLUÇÃO

O ponto $P$ está grafado na Figura 17.73. Aplicando o Teorema (17.31)(i), com $\rho = 4$, $\phi = \pi/6$ e $\theta = \pi/3$, obtemos as coordenadas retangulares:

$$x = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$y = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

Para achar as coordenadas cilíndricas de $P$, notemos primeiro que

$$r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 3 = 4$$

e, então, $r = \pm 2$. Assim, as coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ de $P$ são $(2, \pi/3, 2\sqrt{3})$.

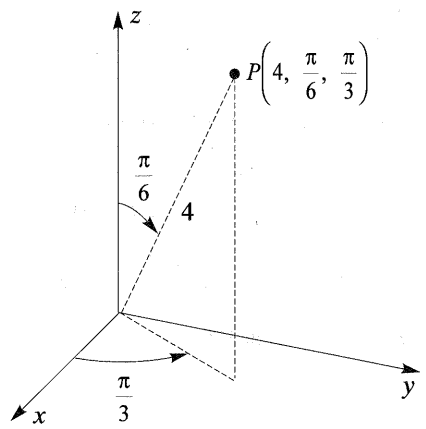



**Figura 17.73**

## EXEMPLO 2

Ache uma equação em coordenadas esféricas cujo gráfico seja o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

## SOLUÇÃO

Fazendo a substituição conforme (17.31)(i), obtemos

$$\begin{aligned} \rho \cos \phi &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\rho(\cos\phi - \rho \operatorname{sen}^2\phi) = 0$$

Logo

$$\rho = 0 \text{ ou } \rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos\phi$$

O gráfico de $\rho = 0$ é a origem, que está também no gráfico de $\rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos\phi$. Logo, $z = x^2 + y^2$ é equivalente a $\rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos\phi$.

Não podemos ter $\operatorname{sen}\phi = 0$ na equação $\rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos\phi$ porque, neste caso, $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$, e então $\cos\phi = 1$ ou $\cos\phi = -1$, o que nos leva ao absurdo $0 = 1$ ou $0 = -1$. Portanto, podemos dividir ambos os membros da equação $\rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos\phi$ por $\operatorname{sen}^2\phi$, obtendo

$$\rho = \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi} = \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}$$

ou equivalentemente

$$\rho = \operatorname{cotg}\phi \csc\phi$$

---

**EXEMPLO 3**

Transforme a equação $\rho = 2 \operatorname{sen}\phi \cos\theta$ para coordenadas retangulares e descreva o seu gráfico.

**SOLUÇÃO**

Como visamos utilizar a primeira fórmula de (17.31)(i), multiplicamos ambos os membros da equação por $\rho$ obtendo

$$\rho^2 = 2\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$

A aplicação de (17.31) nos dá a seguinte equação equivalente em $x$, $y$ e $z$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$$

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Por (14.15), o gráfico é uma esfera de raio 1 cujo centro, em coordenadas retangulares, é (1, 0, 0).

---

Às vezes é conveniente utilizarmos coordenadas esféricas para calcular integrais triplas. O caso mais simples ocorre quando uma função $f$ de $\rho$, $\phi$ e $\theta$ é contínua em toda uma região da forma

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta): a \le \rho \le b, c \le \phi \le d, m \le \theta \le n\}$$

Dividimos $Q$ em sub-regiões $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ que tenham a mesma forma de $Q$, por meio de gráficos de equações $\rho = a_k$, $\phi = c_k$ e $\theta = m_k$, em que $a_k$, $c_k$ e $m_k$ são números nos intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ e $[m, n]$, respectivamente. Esses gráficos são esferas com centros na origem, cones com eixo ao longo do eixo-$z$ e semi-planos contendo o eixo-$z$, respectivamente (ver Figura 17.72).

A Figura 17.74(i) ilustra uma sub-região típica $Q_k$. O incremento $\Delta\rho_k$ é a distância entre duas esferas consecutivas, $\Delta\phi_k$ é a variação no ângulo do vértice entre cones sucessivos e $\Delta\theta_k$ é o ângulo entre dois semiplanos sucessivos. Se, conforme Figura 17.74(ii), $P$ tem coordenadas esféricas $(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ e $P'$ é a projeção de $P$ sobre o eixo-$z$, então, pela trigonometria, o comprimento do segmento $P'P$ é $\rho_k \operatorname{sen} \phi_k$ e então, pelo Teorema (1.14), o comprimento do arco $\overset{\frown}{PS}$ é $\rho_k \operatorname{sen} \phi_k \Delta\theta_k$. A distância de $O$ a $P$ é $\rho_k$ de modo que o comprimento do arco $\overset{\frown}{PR}$ é $\rho_k \Delta\phi_k$. O comprimento do segmento $PQ$ é $\Delta\rho_k$. Aproximaremos o volume $\Delta V_k$ de $Q_k$ considerando-o um paralelepípedo retângulo com essas três dimensões. Assim

$$\Delta V_k \approx (\rho_k \operatorname{sen} \phi_k \Delta\theta_k)(\rho_k \Delta\phi_k)\Delta\rho_k$$

ou

$$\Delta V_k \approx \rho_k^2 \operatorname{sen} \phi_k \, \Delta\rho_k \, \Delta\phi_k \, \Delta\theta_k$$

Definimos a integral tripla de $f$ sobre $Q$ como um limite de somas de Riemann $\sum_k f(\rho_k, \phi_k, \theta_k) \Delta V_k$. Demonstra-se o seguinte teorema.

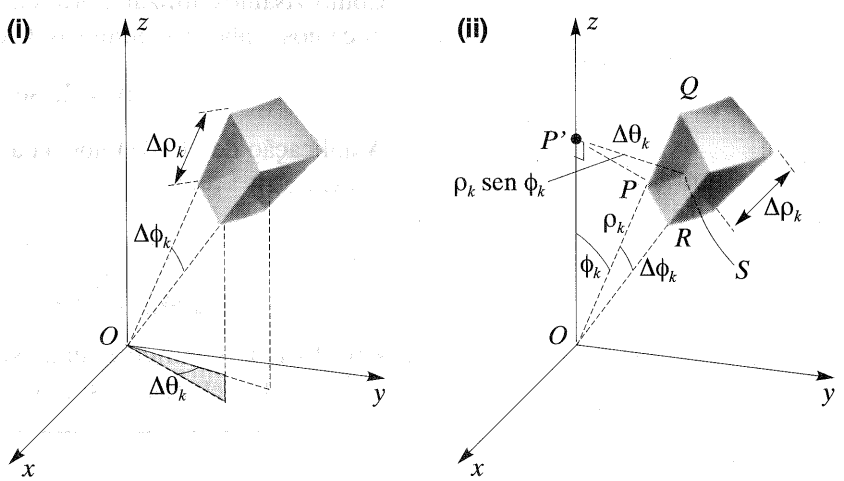



**Figura 17.74**

**Teorema de cálculo (coordenadas esféricas (17.32)**

$$\iiint_Q f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Há cinco outras ordens possíveis de integração para esta integral iterada.

As coordenadas esféricas podem também ser utilizadas sobre regiões mais complicadas do que a que acabamos de considerar, utilizando-se partições interiores. Em tais casos, os limites de integração da integral iterada devem ser ajustados convenientemente.

Nos dois exemplos seguintes reconsideramos os Exemplos 3 e 4 da seção precedente, os quais resolvemos utilizando coordenadas cilíndricas.

## EXEMPLO 4

Ache o centróide de um sólido hemisférico $Q$ de raio $a$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.75 representa o sólido, juntamente com um elemento de volume em coordenadas esféricas e uma coluna indicando uma primeira integração (parcial) em relação a $\rho$. Tal como no Exemplo 3 da Seção 17.7, basta achar $\bar{z}$. Utilizando coordenadas esféricas, temos

$$M_{xy} = \iiint_Q z \, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (\rho \cos \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^a \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \left[ \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \phi \right]_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \tfrac{1}{8} a^4 \left[ \theta \right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{4} \pi a^4$$

Logo

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8} a$$

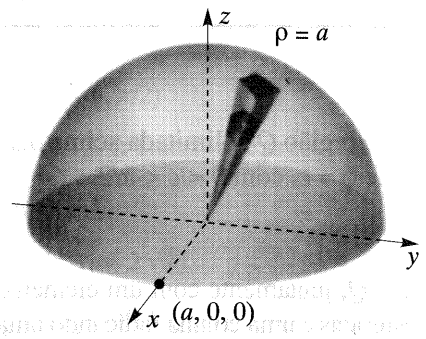



**Figura 17.75**

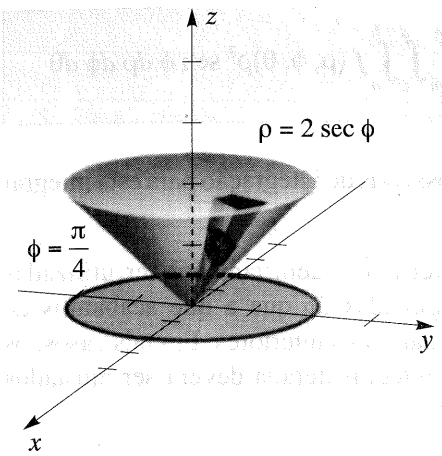



**Figura 17.76**

## EXEMPLO 5

Um sólido $Q$ é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância da origem a $P$. Ache sua massa.

## SOLUÇÃO

O sólido está reesboçado na Figura 17.76, juntamente com um elemento de volume em coordenadas esféricas e uma coluna indicando uma primeira integração (parcial) em relação a $\rho$. Em coordenadas esféricas, a equação do plano $z = 2$ é $\rho \cos \phi = 2$ ou $\rho = 2 \sec \phi$. A densidade em $(x, y, z)$ é dada por

$$\delta = k(x^2 + y^2 + z^2) = k\rho^2$$

para uma constante $k$. Logo

$$m = \iiint_Q \delta \, dV$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sec \phi} \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, dp \, d\phi \, d\theta$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{2 \sec \phi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{32}{5} \sec^5 \phi \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{5} k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \phi \sec \phi \operatorname{tg} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{5} k \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \sec^4 \phi \right]_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \frac{8}{5} k \int_0^{2\pi} (4 - 1) \, d\theta = \frac{48}{5} \pi k$$

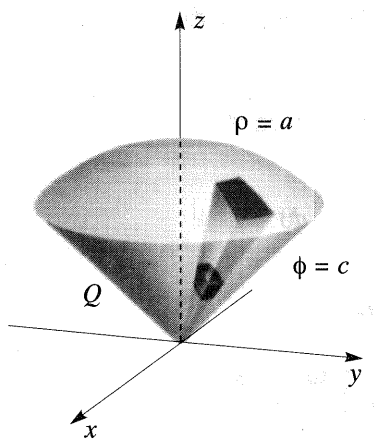



**Figura 17.77**

## EXEMPLO 6

Ache o volume e o centróide da região $Q$ delimitada acima pela esfera $\rho = a$ e abaixo pelo cone $\phi = c$, com $0 < c < \pi/2$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.77 ilustra a região $Q$, juntamente com um elemento de volume em coordenadas esféricas e uma coluna indicando uma primeira integração (parcial) em relação a $\rho$. O volume $V$ é

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^c\int_0^a \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^c \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi}\int_0^c \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = \tfrac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi} \left[-\cos\phi\right]_0^c d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos c)\, d\theta = \tfrac{2}{3}\pi a^3 (1 - \cos c)$$

Por simetria, o centróide está sobre o eixo-$z$, de modo que basta acharmos $\bar{z} = M_{xy}/V$. Aplicando (17.26)(ii) com $\delta(x, y, z) = 1$, obtemos

$$M_{xy} = \iiint_Q z \, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^c\int_0^a (\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, a\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^c \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^a \operatorname{sen}\phi\cos\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^c \operatorname{sen}\phi\cos\phi \, d\phi \, d\theta = \tfrac{1}{4}a^4 \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi\right]_0^c d\theta$$

$$= \tfrac{1}{8}a^4 \operatorname{sen}^2 c \int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{1}{4}\pi a^4 \operatorname{sen}^2 c$$

O centróide, em coordenadas retangulares, é $(0,\ 0,\ \bar{z}\,)$, com

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3}{8}a(1 + \cos c)$$

## EXERCÍCIOS 17.8

**Exercs. 1-2:** Transforme as coordenadas esféricas em (a) coordenadas retangulares e (b) coordenadas cilíndricas.

**1** $(4, \pi/6, \pi/2)$ **2** $(1, 3\pi/4, 2\pi/3)$

**Exercs. 3-4:** Transforme as coordenadas retangulares em (a) coordenadas esféricas e (b) em coordenadas cilíndricas.

**3** $(1,\ 1,\ -2\sqrt{2})$ **4** $(1,\ \sqrt{3},\ 0)$

**Exercs. 5-20:** Descreva o gráfico da equação em três dimensões.

**5** (a) $\rho = 3$ (b) $\phi = \pi/6$ (c) $\theta = \pi/3$

**6** (a) $\rho = 5$ (b) $\phi = 2\pi/3$ (c) $\theta = \pi/4$

**7** $\rho = 4\cos\phi$ **8** $\rho \sec\phi = 6$

**9** $\rho\cos\phi = 3$ **10** $\rho = 4\sec\phi$

**11** $\rho = 6\operatorname{sen}\phi\cos\theta$ **12** $\rho = 8\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$

**13** $\rho = 5\csc\phi\csc\theta$ **14** $\rho = 2\csc\phi\sec\theta$

**15** $\rho = 5\csc\phi$ **16** $\rho\operatorname{sen}\phi = 3$

**17** $\operatorname{tg}\phi = 2$ **18** $\operatorname{tg}\theta = 4$

**19** $\rho = 6\cot\phi\csc\theta$ **20** $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$

**Exercs. 21-30:** Transforme a equação para coordenadas esféricas.

**21** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

**22** $x^2 + y^2 = 4z$

**23** $3x + y - 4z = 12$

**24** $y = x$

**25** $x^2 = 4 - y^2$

**26** $x^2 + (y-2)^2 = 4$

**27** $x^2 - 4z^2 + y^2 = 0$

**28** $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

**29** $y^2 + z^2 = 9$

**30** $x^2 + z^2 = 9$

**Exercs. 31-38:** Use coordenadas esféricas.

**31** Ache a massa e o centro de massa de um sólido hemisférico de raio $a$ se a densidade em um ponto $P$ é diretamente proporcional à distância do centro da base a $P$.

**32** Ache o volume e o centróide do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano-$xy$.

**33** Ache o momento de inércia, em relação ao eixo de simetria, do hemisfério do Exercício 31.

**34** Ache o momento de inércia, em relação a um diâmetro da base, de um sólido hemisférico homogêneo de raio $a$.

**35** Ache o volume do sólido situado acima do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

**36** Ache o volume do sólido exterior ao cone $z^2 = x^2 + y^2$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**37** Ache a massa do sólido exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, se a densidade em um ponto $P$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância do centro das esferas a $P$.

**38** Supondo-se a Terra esférica com raio de 6.370 quilômetros, a densidade $\delta$ (em kg/m$^3$) da atmosfera a uma distância de $\rho$ metros do centro da Terra pode ser aproximada por

$$\delta = 619{,}09 - (9{,}7 \times 10^{-5})\rho$$

para $6.370.000 \le \rho \le 6.373.000$.

(a) Estime a massa da atmosfera entre o nível do solo e uma altitude de 3 quilômetros.

(b) A atmosfera se estende além de uma altitude de 100 quilômetros e tem uma massa total de aproximadamente $5{,}1 \times 10^{18}$ quilogramas. Que percentagem da massa está nos 3 quilômetros inferiores da atmosfera?

**Exercs. 39-40:** Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

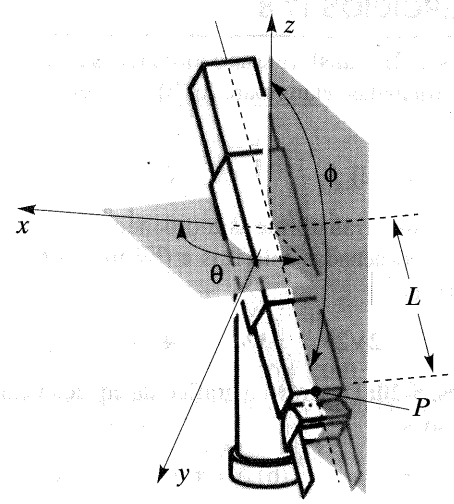
**39** $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$

**40** $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} \int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy$

**41** A relação entre coordenadas esféricas e retangulares é importante no planejamento de juntas de braços de robôs. A figura abaixo ilustra o movimento causado pelas três juntas: uma junta em dobradiça faz o braço girar de um ângulo $\theta$ em torno do eixo-$z$, no plano-$xy$ uma junta deslizante estende e contrai o comprimento $L$ do braço, e outra junta move o braço para cima e para baixo de um ângulo $\phi$ (em coordenadas esféricas).

(a) Se as juntas estão ajustadas em $\theta = 120°$, $\phi = 135°$ e $L = 12$ pol, ache as coordenadas retangulares da junta $P$ na mão do braço.

(b) Descreva as variações de $\theta$, $\phi$ e $L$ necessárias para apanhar um objeto que está no ponto $(-8, -8, 8)$ (coordenadas retangulares).



**42** Utilizam-se pequenos movimentos das juntas dos braços de um robô, chamados *movimentos diferenciais*, para descrever a mudança de posição da mão quando o ajuste das juntas não é exato. Suponha que os ajustes das juntas $\theta$, $\phi$ e $L$ para o braço no Exercício 41 tenha erros $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ e $\Delta L$.

(a) Por meio de diferenciais, estabeleça fórmulas para os erros correspondentes $\Delta x$, $\Delta y$ e $\Delta z$ nas coordenadas retangulares de $P$.

(b) Use as fórmulas obtidas em (a) para estimar $\Delta x$, $\Delta y$ e $\Delta z$ se $\theta = 135°$, $\phi = 45°$, $L = 12$ pol, $\Delta\theta = -1°$, $\Delta\phi = 0{,}5°$ e $\Delta L = 0{,}1$.

## 17.9 MUDANÇA DE VARIÁVEIS E JACOBIANOS

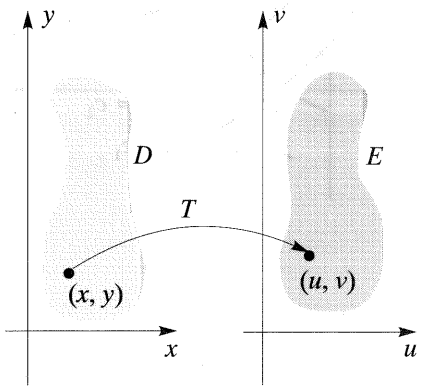



**Figura 17.78**

Na Seção 17.3 vimos como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares em outra integral dupla em coordenadas polares. Nas duas seções precedentes estudamos integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas. Introduziremos agora um método mais geral para a mudança de variáveis em integrais múltiplas. Este método está estreitamente relacionado com as *transformações* (ou *correspondências*) de um sistema retangular para outro.

Comecemos considerando uma função $T$ cujo domínio $D$ é uma região do plano-$xy$ e cujo contradomínio $E$ é uma região do plano-$uv$. De acordo com a Figura 17.78, a cada ponto $(x, y)$ em $D$ corresponde exatamente um ponto $(u, v)$ em $E$ tal que $T(x, y) = (u, v)$. Chamamos $T$ uma **transformação de coordenadas** do plano-$xy$ para o plano-$uv$. Como cada par $(u, v)$ é univocamente determinado por $(x, y)$, ambas $u$ e $v$ são funções de $x$ e $y$. Temos, assim, as seguintes *fórmulas de transformação*, em que $f$ e g são funções que têm o mesmo domínio $D$ que $T$.

**Transformação de coordenadas (17.33)**

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y); (x, y) \text{ em } D, \ (u, v) \text{ em } E$$

Dada a transformação de coordenadas (17.33), particionemos uma região do plano-$uv$ por meio de retas verticais $u = c_1$, $u = c_2$, $u = c_3$, ... e retas horizontais $v = d_1$, $v = d_2$, $v = d_3$, ..., conforme ilustrado na Figura 17.79(i). As curvas de nível para $f$ e $g$ no plano-$xy$ são os gráficos de

$$u = f(x, y) = c_j \text{ e } v = g(x, y) = d_k$$

para $j = 1, 2, 3, \ldots$ e $k = 1, 2, 3, \ldots$ . Estas curvas definem uma *partição curvilinear* de uma região no plano-$xy$, conforme ilustrado na Figura 17.79(ii). Chamamos as curvas $u = f(x, y) = c_j$ e $v = g(x, y) = d_k$ no plano-$xy$ **curvas-$u$** e **curvas-$v$**, respectivamente. Naturalmente, os tipos de curvas obtidas dependem da

natureza das funções $f$ e $g$. O próximo exemplo ilustra um caso em que cada curva-$u$ e cada curva-$v$ é uma reta.

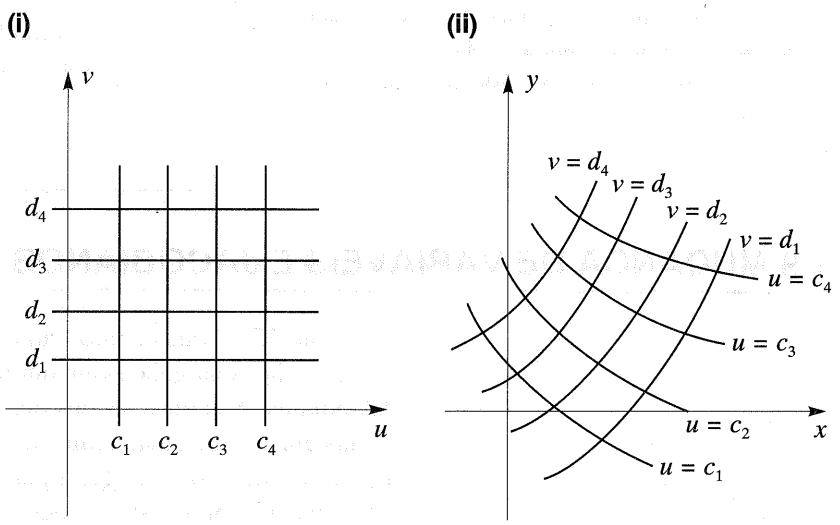



**Figura 17.79**

## EXEMPLO 1

Seja $T$ a transformação de coordenadas do plano-$xy$ para o plano-$uv$ definida por

$$u = x + 2y,\ v = x - 2y$$

Esboce, no plano-$uv$, as retas verticais $u = 2$, $u = 4$, $u = 6$, $u = 8$ e as retas horizontais $v = -1$, $v = 1$, $v = 3$, $v = 5$. Esboce as curvas-$u$ e as curvas-$v$ correspondentes no plano-$xy$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.80(i) ilustra as retas verticais e horizontais no plano-$uv$.

As curvas no plano-$xy$ são as retas

$$x + 2y = 2,\ x + 2y = 4,\ x + 2y = 6,\ x + 2y = 8$$

e as curvas-$v$ são as retas

$$x - 2y = -1,\ x - 2y = 1,\ x - 2y = 3,\ x - 2y = 5$$

A Figura 17.80(ii) ilustra essas retas.

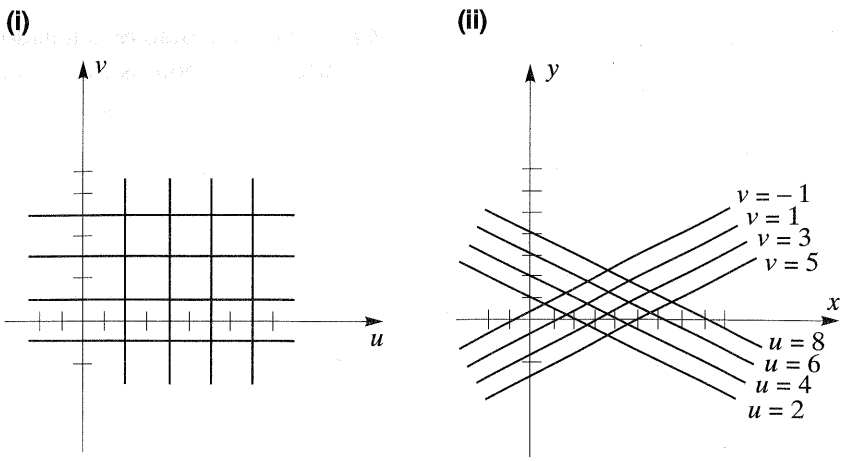



**Figura 17.80**

A transformação $T$ no Exemplo 1 é um-a-um, isto é, se $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ no plano-$xy$, então $T(x_1, y_1) \neq T(x_2, y_2)$ no plano-$uv$. Em geral, se $T$ é uma transformação de coordenadas um-a-um, então, invertendo a correspondência, obtemos uma transformação $T^{-1}$ do plano-$uv$ para o plano-$xy$ chamada **inversa** de $T$. Podemos representar $T^{-1}$ por equações da forma

$$x = F(u, v), y = G(u, v)$$

para certas funções $F$ e $G$. Se ilustramos uma transformação $T$ por meio de uma seta, conforme Figura 17.78, então a inversa $T^{-1}$ pode ser ilustrada *invertendo-se* o sentido da seta, conforme Figura 17.81. Note que $T^{-1}(T(x, y)) = (x, y)$ e $T(T^{-1}(u, v)) = (u, v)$, para todo $(x, y)$ em $D$ e todo $(u, v)$ em $E$.

## EXEMPLO 2

**(a)** Ache a inversa da transformação $T$ do Exemplo 1.

**(b)** Ache a curva do plano-$uv$ que $T^{-1}$ transforma na elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

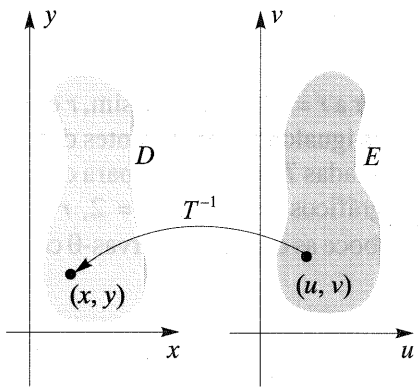



**Figura 17.81**

## SOLUÇÃO

**(a)** A transformação $T$ é dada por

$$u = x + 2y, v = x - 2y$$

Somando membro a membro estas equações, obtemos $u + v = 2x$. Subtraindo membro a membro, obtemos $u - v = 4y$. Assim, $T^{-1}$ é dada por

$$x = \tfrac{1}{2}(u + v), y = \tfrac{1}{4}(u - v)$$

**(b)** Como $x$ e $y$ estão relacionados pelas duas últimas equações da parte (a), os pontos $(u, v)$ correspondentes a $x^2 + 4y^2 = 1$ devem satisfazer a equação

$$[\tfrac{1}{2}(u + v)]^2 + 4[\tfrac{1}{4}(u - v)]^2 = 1$$

o que se simplifica para

$$u^2 + v^2 = 2$$

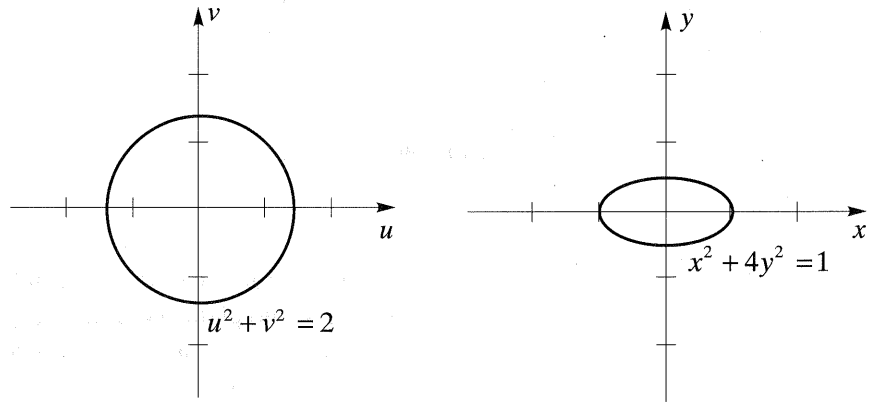



**Figura 17.82**

Segue-se que o círculo de raio $\sqrt{2}$ de centro na origem no plano-$uv$ é transformado na elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ por $T^{-1}$ (ver Figura 17.82).

---

## EXEMPLO 3

Se $P(x, y)$ é um ponto arbitrário com $x \neq 0$ no plano-$xy$, seja

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

e façamos $P(0, b)$ corresponder a $r = b$, $\theta = \pi/2$. Assim, $r$ e $\theta$ são coordenadas polares de $P$, e as igualdades precedentes definem uma transformação de coordenadas $T$ do plano-$xy$ para o plano-$r\theta$. Trace, no plano-$r\theta$, os gráficos de $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ e $\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{3}{2}$. Esboce as curvas-$r$ e curvas-$\theta$ correspondentes no plano-$xy$.

## SOLUÇÃO

A Figura 17.83 é um esboço dos gráficos.

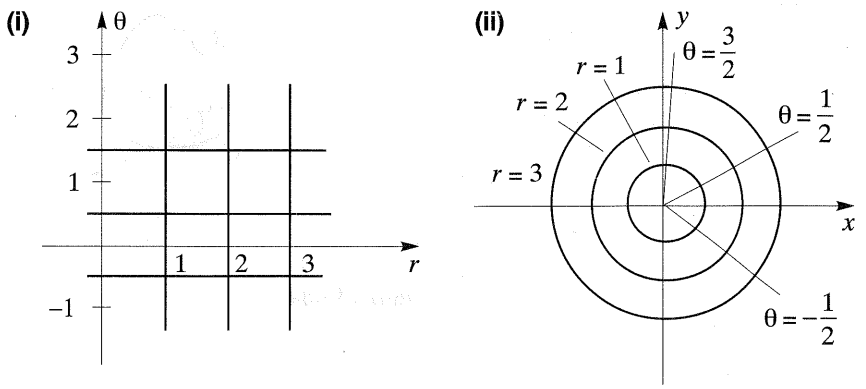



**Figura 17.83**

Na Seção 5.6 vimos como mudar variáveis em uma integral definida $\int_a^b f(x)\ dx$. Sob condições convenientes, substituindo $x = g(u)$, então $dx = g'(u)\ du$ e

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\ du$$

em que $a = g(c)$ e $b = g(d)$ (ver Teorema (5.33)). Obteremos a seguir uma fórmula para mudar variáveis em uma integral dupla.

Consideremos $\iint_R F(x, y)\ dA$, em que $R$ é uma região do plano-$xy$, e suponhamos a substituição

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v)$$

em que $f$ e $g$ são funções dotadas de derivadas parciais segundas contínuas. Essas equações definem uma transformação de coordenadas $W$ do plano-$uv$ para o plano-$xy$. Uma vez substituídos $x$ e $y$, o integrando se torna uma função de $u$ e $v$. Um de nossos objetivos é achar uma região $S$ do plano-$uv$ que seja transformada em $R$ por $W$, conforme ilustrado na Figura 17.84, e tal que

$$\iint_R F(x, y)\ dA = \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\ dA$$

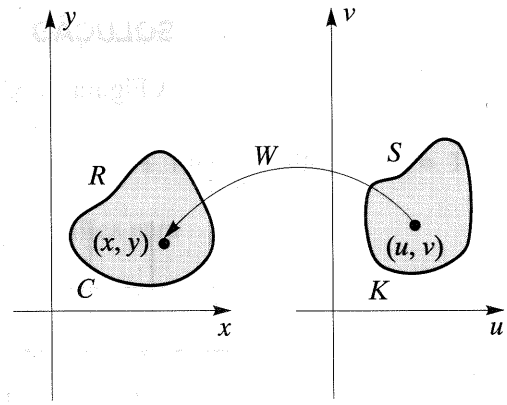



**Figura 17.84**

Para que exista uma região conveniente $S$, é necessário impor restrições à região $R$ e ao integrando $F(x, y)$. Admitiremos que $R$ consiste em todos os pontos que estão sobre uma curva simples, fechada, parcialmente suave $C$ ou no interior dela, e que $F$ tenha derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região aberta contendo $R$. A **direção positiva ao longo de $C$** é tal que, quando um ponto $P$ percorre $C$, a região $R$ está sempre à esquerda. Para a **direção negativa**, $R$ está sempre à direita quando $P$ percorre $C$. Exigiremos também que $W$ transforme uma região $S$ do plano-$uv$ biunivocamente em $R$, e que $S$ seja limitada por uma curva $K$ simples, fechada, parcialmente suave que $W$ transforme em $C$. Nossa exigência final é que, quando $(u, v)$ traçar $K$ uma vez na direção positiva, o ponto $(x, y)$ correspondente trace $C$ uma vez no sentido positivo ou no sentido negativo. É possível enfraquecer estas condições, entretanto, isto ultrapassa o âmbito deste livro.

A função de $u$ e $v$ introduzida na próxima definição será usada no processo de mudança de variável. Sua denominação é uma homenagem ao matemático alemão C.G. Jacobi (1804-1851).

**Definição (17.34)**

Se $x = f(u, v)$ e $y = g(u, v)$, então o **jacobiano** de $x$ e $y$ em relação a $u$ e $v$, denotado por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

No próximo teorema, *todos os símbolos têm as mesmas significações que anteriormente, e admitiremos que as regiões e funções satisfaçam as condições impostas.* No enunciado do

teorema, utilizaremos as notações $dx\,dy$ e $du\,dv$ em lugar de $dA$, de modo a não restar nenhuma dúvida sobre a região de integração.

**Teorema (17.35)** Se $x = f(u, v), y = g(u, v)$ é uma transformação de coordenadas, então

$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \pm \iint_S F(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$

À medida que $(u, v)$ traça a fronteira $K$ de $S$ uma vez na direção positiva, o ponto correspondente $(x, y)$ traça a fronteira $C$ de $R$ uma vez, seja no sentido positivo, quando se escolhe o sinal "mais", ou no sentido negativo, quando se escolhe o sinal "menos".

No Apêndice II damos uma demonstração do Teorema (17.35) baseada no Teorema de Green (18.19).

Fazendo $F(x, y) = 1$ para todo $(x, y)$ em $R$, então a integral à esquerda em (17.35) é a área $A$ de $R$; obtemos

$$A = \pm \iint_S \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$

Se $\partial(x, y)/\partial(u, v) > 0$ em toda a $S$, então a integral dupla à direita desta equação é positiva, devendo-se usar o sinal +. Isto mostra que se o jacobiano é sempre positivo, então, quando o ponto $(u, v)$ traça a fronteira $K$ e $S$ uma vez na direção positiva, o ponto $(x, y)$ traça a fronteira $C$ de $R$ uma vez na direção positiva. Se o jacobiano é sempre negativo, então $(x, y)$ traça $C$ uma vez na direção negativa. Isto nos dá o seguinte corolário do Teorema (17.35).

**Corolário (17.36)** Se $x = f(u, v), y = g(u, v)$ é uma transformação de coordenadas e se o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ não muda de sinal em $S$, então

$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \iint_S F(f(u, v), g(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv$$

## EXEMPLO 4

Calcule

$$\iint_R e^{(y - x)/(y + x)}\,dx\,dy$$

em que $R$ é a região do plano-$xy$ delimitada pelo trapezóide de vértices (0, 1), (0, 2), (2, 0) e (1, 0).

**SOLUÇÃO**

O fato de $y-x$ e $y+x$ aparecerem no integrando sugere a seguinte substituição:

$$u = y - x,\ v = y + x$$

Estas equações definem uma transformação $T$ do plano-$xy$ para o plano-$uv$. Para aplicar o Teorema (17.35), devemos utilizar a transformação inversa $T^{-1}$. Para achar $T^{-1}$, resolvemos as equações precedentes em relação a $x$ e $y$ em termos de $u$ e $v$, obtendo

$$x = \tfrac{1}{2}(-u + v),\quad y = \tfrac{1}{2}(u + v)$$

Por (17.34), o jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

A Figura 17.85(i) ilustra a região $R$. Para determinar a região $S$ no plano-$uv$ que se transforma em $R$, notemos que os lados de $R$ estão sobre as retas

$$x = 0,\ x + y = 2,\ y = 0,\ x + y = 1$$

Fazendo $x = \frac{1}{2}(-u + v)$ e $y = \frac{1}{2}(u + v)$, vemos que as curvas correspondentes no plano-$uv$ são, respectivamente,

$$v = u,\ v = 2,\ v = -u,\ v = 1$$

Essas retas definem a fronteira da região trapezoidal $S$ exibida na Figura 17.85(ii).

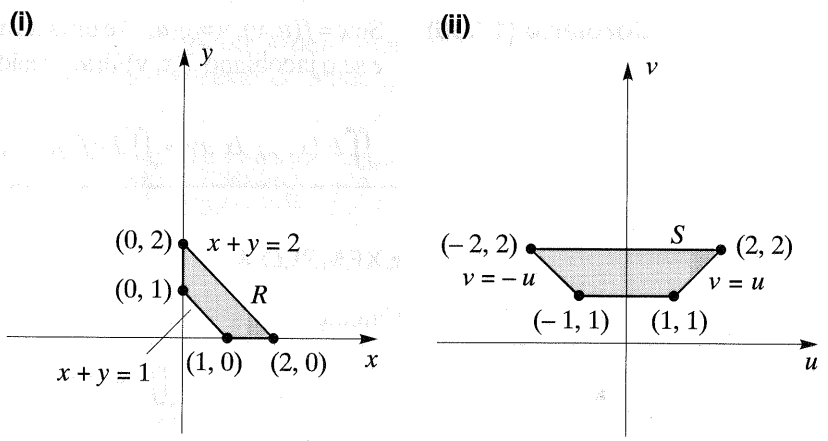



**Figura 17.85**

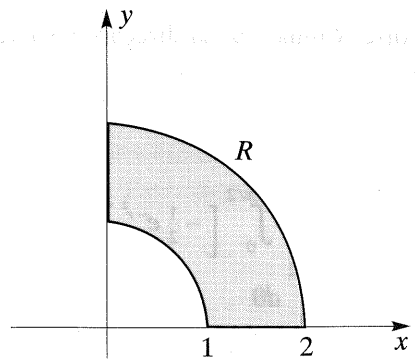



**Figura 17.86**

Se o ponto $(u, v)$ percorre a reta $v = u$ de (1, 1) a (2, 2), então o ponto correspondente $(x, y)$ percorre a reta $x = 0$ de (0, 1) a (0, 2). Analogamente, se $(u, v)$ percorre a reta $v = 2$ de (2, 2) a (– 2, 2), então $(x, y)$ percorre a reta $x + y = 2$ de (0, 2) a (2, 0). Procedendo desta maneira, vê-se que, se $(u, v)$ percorre a fronteira de $S$ uma vez na direção *positiva*, então $(x, y)$ traça a fronteira de $R$ uma vez na direção *negativa*. Pode-se mostrar também, por meio de desigualdades, que pontos interiores de $S$ correspondem a pontos interiores de $R$.

Aplicando o Teorema (17.35), temos

$$\iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy = -\iint_S e^{u/v}\left(-\tfrac{1}{2}\right)du\,dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\,du\,dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[\, ve^{u/v} \,\right]_{-v}^{v} dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 v(e - e^{-1})\,dv$$

$$= \tfrac{1}{2}(e - e^{-1})\left[\, \tfrac{1}{2}v^2 \,\right]_1^2 = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1}) \approx 1{,}763$$

## EXEMPLO 5

Calcule $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ para a região $R$ do primeiro quadrante no plano-$xy$ situada entre os arcos circulares da Figura 17.86.

## SOLUÇÃO

Poderíamos calcular esta integral transformando-a em coordenadas polares, como fizemos na Seção 17.3, entretanto, nosso objetivo é demonstrar a aplicação do Teorema (17.35). A substituição polar

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta$$

define uma transformação do plano-$r\theta$ no plano-$xy$, cujo jacobiano é

$$\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(r,\,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Pode-se verificar que a região retangular $S$ no plano-$r\theta$ delimitada por $r = 1$, $r = 2$, $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ (ver Figura 17.87) corresponde a $R$ pela transformação. Além disso, quando $(r, \theta)$ percorre a fronteira de $S$ uma vez na direção positiva, o ponto

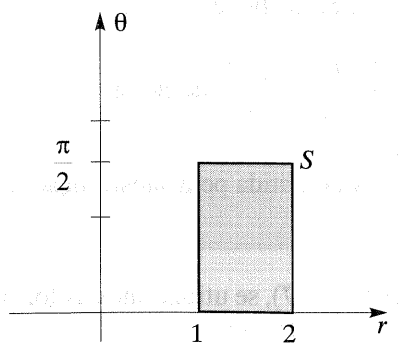



**Figura 17.87**

correspondente $(x, y)$ percorre $R$ uma vez na direção positiva. Logo, pelo Teorema (17.35),

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_S e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_1^2 d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2}(e^{-4} - e^{-1})\int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{4}\pi(e^{-4} - e^{-1}) \approx 0{,}275$$

Pode-se estender a Definição (17.34) a funções de três variáveis, como a seguir.

**Definição (17.37)**

Se $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$ e $z = h(u, v, w)$, então o **jacobiano** de $x, y$ e $z$ em relação a $u, v$ e $w$, denotado por $\partial(x, y, z)/\partial(u\ v, w)$, se define como

$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u,\ v,\ w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

O teorema seguinte é o análogo tridimensional ao Corolário (17.36).

**Teorema (17.38)**

Se $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ é uma transformação de coordenadas de uma região $S$ em um sistema coordenado-$uvw$ em uma região $R$ em um sistema coordenado-$xyz$, e se o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ não muda de sinal em $S$, então

$$\iiint_R F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_S G(u, v, w)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw$$

em que $G(u, v, w)$ é a expressão obtida pela substituição de $x, y, z$ em $F(x, y, z)$.

Para ilustrar a Definição (17.37), se utilizarmos as fórmulas das coordenadas esféricas (17.31), então

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta,\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,\ z = \rho\cos\phi \quad .$$

No Exercício 33, pede-se mostrar que

$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\rho,\ \phi,\ \theta)} = \rho^2 \text{ sen } \phi$$

Como $\rho^2 \text{ sen } \phi \geq 0$, a conclusão do Teorema (17.38) toma a forma

$$\iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S G(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \text{ sen } \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

que concorda com a fórmula (17.32), obtida de maneira intuitiva.

Concluiremos esta seção com um problema aplicado que envolve uma mudança de variáveis em uma integral dupla.

## EXEMPLO 6

*Senóides elípticas* constituem boas aproximações da forma do fundo de muitos lagos. Suponha que a borda de um lago tenha a forma da elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, com $a$ e $b$ positivos. Se a profundidade máxima da água é $h_M$, então uma senóide elíptica é dada por

$$f(x,\ y) = -h_M \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right)$$

em que $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) \leq 1$ (ver Figura 17.88). Ache o volume $V$ e a profundidade média $h_{méd}$ da água no lago.

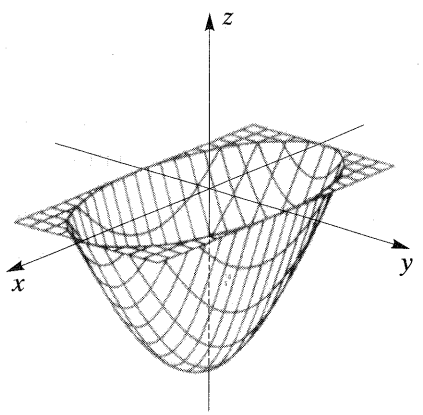



**Figura 17.88**

## SOLUÇÃO

Se $R$ é a região elíptica que corresponde à superfície do lago (ver Figura 17.89(i)), então, como a profundidade da água em $(x, y)$ é $|f(x, y)|$,

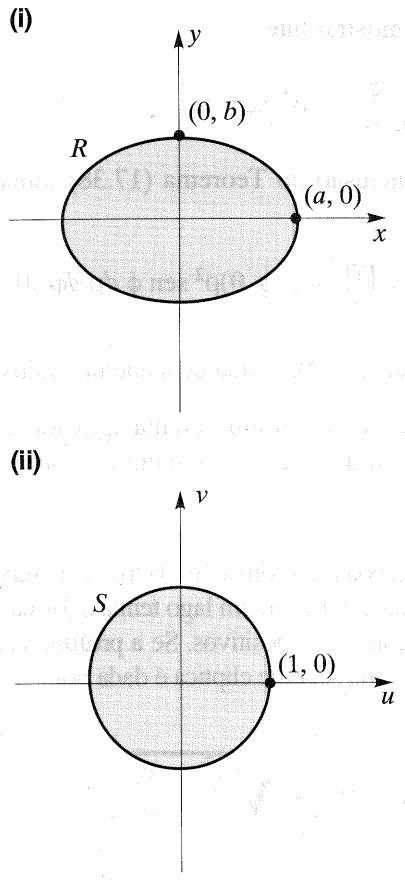



**Figura 17.89**

$$V = \iint_R |f(x, y)|\, dA = h_M \iint_R \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) dA$$

A forma do integrando sugere a substituição

$$x = au, y = bv$$

Neste caso, o jacobiano é $\partial(x, y)/\partial(u, v) = ab > 0$, e a região $S$ que corresponde a $R$ é o disco circular $u^2 + v^2 \leq 1$ (ver Figura 17.89(ii)). Aplicando o Corolário (17.36), obtemos

$$V = abh_M \iint_S \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{u^2 + v^2}\right) du\, dv$$

Podemos agora calcular a última integral transformando-a em coordenadas polares $u = r\cos\theta$, $v = r\,\text{sen}\,\theta$, o que nos dá

$$V = abh_M \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}r\right) r\, dr\, d\theta$$

Utilizando a integração por partes, ou a Fórmula 83 da tábua de integrais, temos

$$\begin{aligned} V &= abh_M \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}r\right) + \frac{2}{\pi}r\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}r\right)\right]_0^1 d\theta \\ &= abh_M \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) d\theta \\ &= abh_M \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) 2\pi \approx 1{,}4535\, abh_M \end{aligned}$$

Esta fórmula pode ser usada para estimar o volume do lago a partir das três medidas $a$, $b$ e $h_M$.

A área da região elíptica $R$ é $\pi ab$. Aplicando às integrais duplas um análogo da Definição (5.29), obtemos a profundidade média:

$$h_{\text{méd}} = \frac{1}{\pi ab} \iint_R |f(x, y)|\, dA$$

Logo

$$h_{\text{méd}} \approx \frac{1}{\pi ab}(1{,}4535)abh_M \approx 0{,}4627 h_M$$

Um estudo de 107 lagos em todo o mundo acusou um valor médio $h_{\text{méd}}/h_M$ de 0,467.

## EXERCÍCIOS 17.9

**Exercs. 1-8:** Seja $T$ a transformação do plano-$xy$ para o plano-$uv$ definida pelas fórmulas dadas. (a) Descreva as curvas-$u$ e as curvas-$v$. (b) Estabeleça fórmulas $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$ que definam $T^{-1}$.

**1** $u = 3x$, $v = 5y$

**2** $u = \frac{1}{2}y$, $v = \frac{1}{3}x$

**3** $u = x - y$, $v = 2x + 3y$

**4** $u = -5x + 4y$, $v = 2x - 3y$

**5** $u = x^3$, $v = x + y$

**6** $u = x + 1$, $v = 2 - y^3$

**7** $u = e^x$, $v = e^y$

**8** $u = e^{2y}$, $v = e^{-3x}$

**Exercs. 9-12:** Seja $T$ a transformação de coordenadas indicada (ver Exercícios 1-4). Ache a curva no plano-$uv$ que corresponde à curva no plano-$xy$ especificada em (a) e (b).

**9** $u = 3x$, $v = 5y$

(a) o retângulo de vértices (0, 0), (0, 1), (2, 1), (2, 0).

(b) o círculo $x^2 + y^2 = 1$

**10** $u = \frac{1}{2}y$, $v = \frac{1}{3}x$

(a) o triângulo de vértices (0, 0), (3, 6), (9, 4)

(b) a reta $3x - 2y = 4$

**11** $u = x - y$, $v = 2x + 3y$

(a) o triângulo de vértices (0, 0), (0, 1), (2, 0)

(b) a reta $x + 2y = 1$

**12** $u = -5x + 4y$, $v = 2x - 3y$

(a) o quadrado de vértices (0, 0), (1, −1), (2, 0), (1, 1)

(b) o círculo $x^2 + y^2 = 1$

**Exercs. 13-16:** Ache o jacobiano $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

**13** $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$

**14** $x = e^u \operatorname{sen} v$, $y = e^u \cos v$

**15** $x = ve^{-2u}$, $y = u^2e^{-v}$

**16** $x = \dfrac{u}{u^2 + v^2}$, $y = \dfrac{v}{u^2 + v^2}$

**Exercs. 17-18:** Ache o jacobiano $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$.

**17** $x = 2u + 3v - w$, $y = v - 5w$, $z = u + 4w$

**18** $x = u^2 + vw$, $y = 2v + u^2w$, $z = uvw$

**Exercs. 19-22:** Expresse a integral como uma integral dupla iterada sobre uma região $S$ no plano-$uv$ fazendo a mudança de variáveis indicada.

**19** $\displaystyle\iint_R (y - x)\, dx\, dy$

fronteira de $R$: $y = 2x$, $y = 0$, $x = 2$

mudança de variáveis $x = u + v$, $y = 2v$

**20** $\displaystyle\iint_R (3x - 4y)\, dx\, dy$

fronteira de $R$: $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 4$

mudança de variáveis: $x = u - 2v$, $y = 3u - v$

**21** $\displaystyle\iint_R (\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{9}y^2)\, dx\, dy$

fronteira de $R$: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$

mudança de variáveis: $x = 2u$, $y = 3v$

**22** $\displaystyle\iint_R xy\, dx\, dy$

fronteira de $R$: $y = 2\sqrt{1 - x}$, $x = 0$, $y = 0$

mudança de variáveis: $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$

**Exercs. 23-28:** Calcule a integral fazendo a mudança de variáveis indicada.

**23** $\displaystyle\iint_R (x - y)^2 \cos^2 (x + y)\, dx\, dy$

fronteira de $R$: o quadrado de vértices (0, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 0)

mudança de variáveis: $u = x - y$, $v = x + y$

**24** $\iint_R \text{sen}\,\frac{y-x}{y+x}\,dx\,dy$

fronteira de $R$: o trapézio de vértices (1, 1), (2, 2), (4, 0), (2, 0)

mudança de variáveis: $u = y - x$, $v = y + x$

**25** $\iint_R (x^2 + 2y^2)\,dx\,dy$

fronteira de $R$: $xy = 1$, $xy = 2$, $y = |x|$, $y = 2x$

mudança de variáveis: $x = u/v$, $y = v$

**26** $\iint_R \frac{1}{(4x - 4y + 1)^2}\,dx\,dy$

fronteira de $R$: $x = \sqrt{-y}$, $x = y$, $x = 1$

mudança de variáveis: $x = u + v$, $y = v - u^2$

**27** $\iint_R \frac{2y + x}{y - 2x}\,dx\,dy$

fronteira de $R$: o trapézio de vértices $(-1, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(0, 2)$

mudança de variáveis: $u = y - 2x$, $v = 2y + x$

**28** $\iint_R (\sqrt{x - 2y} + \frac{1}{4}y^2)\,dx\,dy$

fronteira de $R$: o triângulo de vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2)

mudança de variáveis: $u = \frac{1}{2}y$, $v = x - 2y$

**29** Em virtude da rotação, a Terra não é perfeitamente esférica, mas ligeiramente achatada nos pólos, com raio polar de 6.356 quilômetros e raio equatorial de 6.378 quilômetros. Resulta daí que a forma da Terra pode ser aproximada pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a = b = 6.378$ e $c = 6.356$. Estime o volume da Terra. (*Sugestão:* Fazer $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.)

**30** Um balão tem a forma da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, em que $x$, $y$ e $z$ são expressos em metros. O balão é aquecido vagarosamente à pressão constante de uma atmosfera, isto é, $1{,}01 \times 10^5$ N/m$^2$, e se expande até atingir a forma do elipsóide $x^2/10 + y^2/16 + z^2/12 = 1$. Para um gás ideal, o trabalho $W$ efetuado pelo gás é dado por

$$W = \iiint_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

em que $P$ é a pressão e $V_1$ e $V_2$ são os volumes inicial e final. Use o Exercício 29 para achar $W$.

**31** Ref. Exercício 41, Seção 17.8. É muito difícil achar fórmulas que descrevam a posição final da mão quando se movimentam cinco ou seis juntas do braço de um robô. O processo pode ser simplificado utilizando-se os três *ângulos de Euler* $\phi$, $\theta$ e $\psi$ para rotação de eixos coordenados. Referindo-nos à figura, primeiro giramos o plano-$xy$ de um ângulo $\phi$ em torno do eixo-$z$, obtendo os novos eixos $x''$ e $y''$. Em seguida, giramos o plano-$x''z$ de um ângulo $\theta$ em torno do eixo-$y''$, obtendo os novos eixos $x'''$ e $z'$. Finalmente, giramos o plano-$x'''y''$ de um ângulo $\psi$ em torno do eixo-$z'$, obtendo os novos eixos $x'$ e $y'$. Se as coordenadas de um ponto $P$ da mão são $(x, y, z)$ no sistema-$xyz$, então suas coordenadas $(x', y', z')$ no sistema transformado são dadas por

$$\begin{aligned} x' = {} & (\cos\phi\cos\theta\cos\psi - \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\psi)x \\ & + (-\cos\phi\cos\theta\,\text{sen}\,\psi - \text{sen}\,\phi\cos\psi)y \\ & + (\cos\phi\,\text{sen}\,\theta)z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' = {} & (\text{sen}\,\phi\cos\theta\cos\psi + \cos\phi\,\text{sen}\,\psi)x \\ & + (-\text{sen}\,\phi\cos\theta\,\text{sen}\,\psi + \cos\phi\cos\psi)y \\ & + (\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta)z \end{aligned}$$

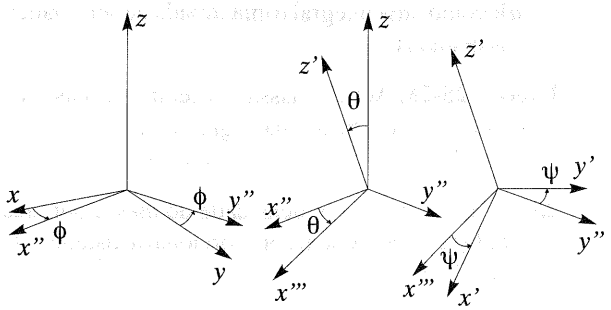
$$z' = (-\text{sen}\,\theta\cos\psi)x + (\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi)y + (\cos\theta)z$$

(a) Gira-se de um ângulo $\phi = 45°$ a mão de um robô posicionada em $P(\sqrt{2}, 0, 1)$. Ache a nova localização da mão.

(b) Gira-se em seguida a mão de um ângulo $\theta = 90°$. Ache a nova locação da mão.

(c) Finalmente, gira-se a mão de um ângulo $\psi = 90°$. Ache a posição final da mão.

**31**




**32** Se o braço de um robô tem muitas juntas, pode-se posicionar sua mão em uma localização específica de mais de uma maneira, girando as juntas diferentemente. Há exatamente uma escolha para a rotação se e somente se o jacobiano da transformação de coordenadas for diferente de zero.

(a) Ache o jacobiano $\partial(x', y', z')/\partial(x, y, z)$ do Exercício 31 se $\phi = 45°$, $\theta = 90°$ e $\psi = 90°$.

(b) Pode-se posicionar a mão na mesma localização utilizando valores diferentes de $\phi$, $\theta$ e $\psi$?

**33** Verifique que, para a transformação de coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

**34** Use (17.38) para estabelecer uma fórmula para transformar

$$\iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas.

**35** Se a transformação de coordenadas $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ é um-a-um, mostre que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

*Sugestão:* Aplique a propriedade seguinte dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{vmatrix}$$

**36** Dadas a transformação $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ e a transformação $u = h(r, s)$, $v = k(r, s)$, mostre que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$$

(*Sugestão*: Use a sugestão do Exercício 35.)

**Exercs. 37-38:** Seja $T$ a transformação indicada do plano-$uv$ para o plano-$xy$. Grafe os pontos $(u, v)$ tais que $\partial(x, y)/\partial(u, v) = 0$ para os valores indicados de $u$. (Este gráfico mostra onde $T$ não é um-a-um.)

**37** $x = \frac{1}{4}v^4 + u^2$, $y = u - \cos v$; $-\pi \le u \le \pi$

**38** $x = \frac{1}{20}u^4 - 10 \cos u + \frac{1}{2}v^2$, $y = u + v$; $-5 \le u \le 5$

## 17.10 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

**Exercs. 1-6:** Calcule a integral iterada.

**1** $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{x^3} (x^2 - 2y)\, dy\, dx$

**2** $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{1}^{y^2} \frac{1}{y}\, dx\, dy$

**3** $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{r}^{r^2+1} r\, d\theta\, dr$

**4** $\displaystyle\int_{2}^{0}\int_{0}^{z^2}\int_{x}^{z} (x + z)\, dy\, dx\, dz$

**5** $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{\sqrt{y}}^{1}\int_{z^2}^{y} x\, y^2 z^3\, dx\, dz\, dy$

**6** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{a\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

**Exercs. 7-10:** Se $f(x, y)$ é uma função contínua arbitrária, expresse $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral dupla iterada, em que $R$ é a região delimitada pelos gráficos das equações.

**7** $x^2 - y^2 = 4$, $x = 4$

**8** $x^2 - y^2 = 4$, $y = 4$, $y = 0$

**9** $y^2 = 4 + x$, $y^2 = 4 - x$

**10** $y = -x^2 + 4$, $y = 3x^2$

**Exercs. 11-14:** Esboce a região de integração para a integral iterada.

**11** $\int_{-1}^{1} \int_{e^y}^{y^3} dx\ dy$

**12** $\int_{-1}^{0} \int_{x}^{-x^2} dy\ dx$

**13** $\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2+4\cos\theta} r\ dr\ d\theta$

**14** $\int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{y^2+1}}^{\sqrt{y^2+1}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2+y^2}} dz\ dx\ dy$

**Exercs. 15-16:** Inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

**15** $\int_{0}^{3} \int_{y^2}^{9} ye^{-x^2}\ dx\ dy$

**16** $\int_{0}^{1} \int_{x}^{\sqrt{x}} e^{x/y}\ dy\ dx$

**Exercs. 17-18:** Ache o volume do sólido abaixo do gráfico da equação e acima da região $R$ no plano-$xy$.

**17** $z = xy^2$; $R$ é o retângulo de vértices (1, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 3).

**18** $z = 7 - x^2 - y^2$; $R$ é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.

**19** Ache a área da parte da superfície do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4x$.

**20** Ache a área da superfície da parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que está sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

**21** Por meio de uma integral dupla ache a área da região delimitada pelo eixo polar e os gráficos de $r = e^{\theta}$ e $r = 2$ de $\theta = 0$ a $\theta = \ln 2$.

**22** Utilizando coordenadas polares, calcule

$$\int_{-a}^{0} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} \sqrt{x^2 + y^2}\ dy\ dx$$

**23** Utilizando coordenadas esféricas, calcule

$$\int_{0}^{4} \int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{32-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dz\ dy\ dx$$

**24** Seja $f$ uma função contínua arbitrária de $x$, $y$, $z$ e seja $Q$ a região delimitada pelo parabolóide $y = x^2 + 4z^2$ e o plano $y = 4$. Expresse $\iiint_Q f(x, y, z)\ dV$ como uma integral tripla iterada de seis maneiras distintas.

**Exercs. 25-26:** Ache a massa e o centro de massa da lâmina que tem a forma da região delimitada pelos gráficos das equações e a densidade indicada.

**25** $y = x$, $y = 2x$, $x = 3$; densidade de massa por área em $P(x, y)$ diretamente proporcional à distância do eixo-$y$ a $P$.

**26** $y^2 = x$, $x = 4$; densidade de massa por área em $P(x, y)$ diretamente proporcional à distância da reta $x = -1$ a $P$.

**27** Uma lâmina tem a forma da região interior ao caracol $r = 2 + \text{sen}\ \theta$ e exterior ao círculo $r = 1$. A densidade de massa por área em $P(r, \theta)$ é inversamente proporcional à distância do pólo a $P$. Ache a massa.

**28** Uma lâmina tem a forma da região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x^3$, e a densidade de massa por área em $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-$y$ a $P$. Ache $I_x$, $I_y$ e $I_O$.

**29** Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo de lados com comprimentos $a$, $b$ e $\sqrt{a^2 + b^2}$. A densidade de massa por área é diretamente proporcional à distância em relação ao lado de comprimento $a$. Ache o momento de inércia em relação a uma reta contendo o lado de comprimento $a$.

**30** Uma lâmina tem a forma da região entre círculos concêntricos de raios $a$ e $b$, $a < b$. A densidade de massa por área em um ponto $P$ é diretamente proporcional à distância do centro dos círculos a $P$. Utilizando coordenadas polares, ache o momento de inércia em relação a uma reta pelo centro.

**31** Utilizando integrais triplas, ache o volume e o centróide do sólido delimitado pelos gráficos do cilindro $z = x^2$ e dos planos $y = 0$ e $y + z = 4$.

**32** Um sólido é delimitado pelo parabolóide $z = 9x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 9$. A densidade em $P(x, y, z)$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância de $(0, 0, -1)$ a $P$. Estabeleça uma integral tripla iterada para achar o momento de inércia em relação ao eixo-$z$.

**33** Um sólido é delimitado pelo hiperbolóide $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $y = 4$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-$y$ a $P$. Estabeleça uma integral tripla iterada para achar o momento de inércia em relação ao eixo-$y$.

**34** Um sólido homogêneo de densidade $\delta$ é delimitado pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, pelo interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano-$xy$. Por meio de coordenadas cilíndricas, ache

(a) a massa (b) o centro de massa

(c) o momento de inércia em relação ao eixo-$z$.

**35** Um sólido esférico tem raio $a$, e a densidade em um ponto arbitrário é diretamente proporcional à distância do ponto ao centro da esfera. Utilize coordenadas esféricas para achar a massa.

**Exercs. 36-37:** Complete a tabela.

| | Coordenadas retangulares | Coordenadas cilíndricas | Coordenadas esféricas |
|---|---|---|---|
| **36** | $(2, -2, 1)$ | _____ | _____ |
| **37** | _____ | _____ | $(12, \pi/6, 3\pi/4)$ |

**Exercs. 38-43:** Escreva a equação em coordenadas retangulares e descreva seu gráfico em três dimensões.

**38** $r = -\csc\theta$ **39** $z + 3r^2 = 9$

**40** $z = \frac{1}{4}r$ **41** $\rho \operatorname{sen}\phi = 4$

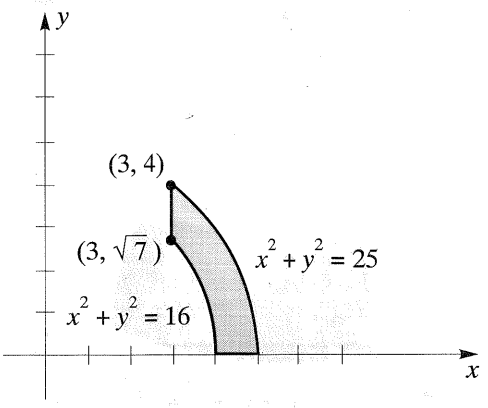
**42** $\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta = 1$ **43** $\rho^2 - 3\rho = 0$

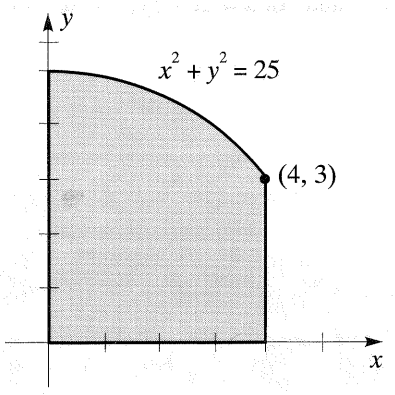
**Exercs. 44-47:** Transforme a equação para (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

**44** $x^2 + y^2 = 1$ **45** $z = x^2 - y^2$

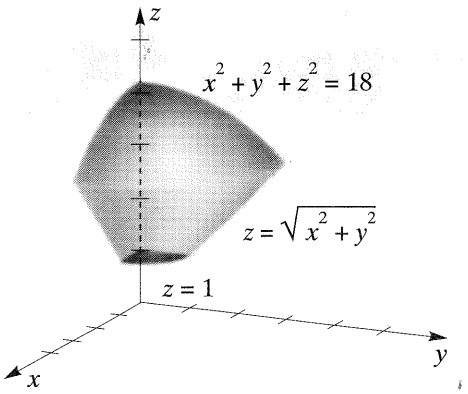
**46** $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ **47** $2x + y - 3z = 4$

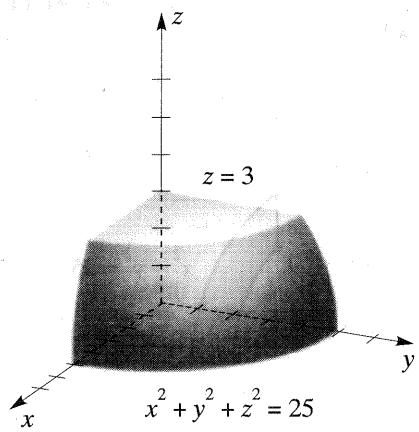
**Exercs. 48-49:** Expresse a área da região em termos de uma ou mais integrais duplas iteradas que envolvam apenas a ordem de integração (a) $dy\,dx$, (b) $dx\,dy$ e (c) $dr\,d\theta$.




**Exercs. 50-51:** Expresse a área da região em termos de uma ou mais integrais triplas iteradas em (a) coordenadas retangulares, (b) coordenadas cilíndricas e (c) coordenadas esféricas.






**52** Se uma transformação $T$ do plano-$xy$ para o plano-$uv$ é dada por $u = 2x + 5y$, $v = 3x - 4y$, ache

(a) as curvas-$u$ (b) as curvas-$v$

(c) $T^{-1}$ (d) $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

(e) a curva do plano-$uv$ correspondente à reta $ax + by + c = 0$

(f) a curva do plano-$uv$ correspondente ao círculo $x^2 + y^2 = a^2$

**53** Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_y^{2-y} e^{(x-y)/(x+y)}\, dx\, dy$$

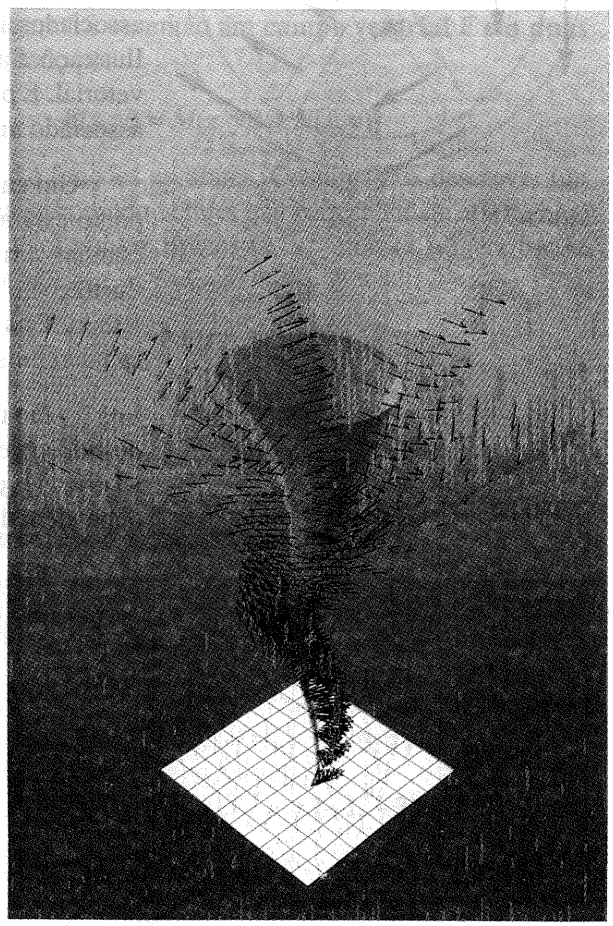
aplicando a mudança de variáveis $u = x - y$, $v = x + y$.

MAKRON Books

# Capítulo 18

# CÁLCULO VETORIAL

## INTRODUÇÃO



Neste capítulo, aplicaremos métodos anteriores a novos conceitos, obtendo resultados que encontram muitas aplicações nas ciências. Abordaremos primeiro os *campos vetoriais*. As principais aplicações envolvem *campos de velocidade* e *campos de força* seja de sólidos, líquidos ou gases – assim chamados porque a cada partícula da substância associamos um vetor velocidade ou um vetor força. De importância primordial são os campos vetoriais *conservativos*, porque incluem os campos gravitacional e eletromagnético, presentes em todo o universo.

As *integrais curvilíneas*, que são generalizações da integral definida, permitem-nos achar o trabalho realizado quando uma partícula se move em um de campo de força. As *integrais de superfície* são extensões das integrais duplas e se aplicam a problemas de fluxo – taxa de fluxo de energia, fluídos e gases através de uma superfície. As integrais curvilíneas e de superfície são usadas na interpretação da *divergência* e do *rotacional* de um campo vetorial. A divergência mede a taxa à qual uma entidade física, como o calor, é absorvida ou gerada na vizinhança de um ponto. O rotacional permite descrever os aspectos rotacionais de um campo vetorial, tais como direção e magnitude da circulação do vento dentro de um tornado.

As seções finais abordam o *teorema da divergência* e o *teorema de Stokes*, que relacionam a divergência com o fluxo, e o trabalho com o rotacional, respectivamente. Estes dois importantes resultados têm conseqüências de largo alcance na ciência e na engenharia.

## 18.1 CAMPOS VETORIAIS

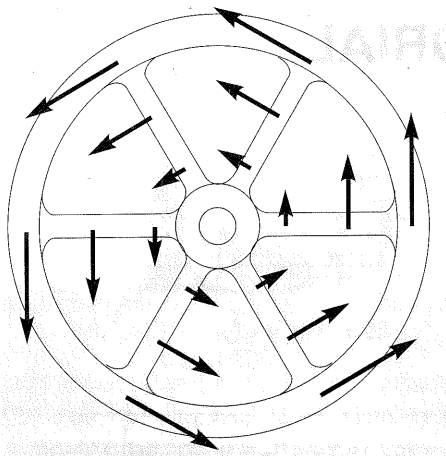


Figura 18.1

Se a cada ponto $K$ de uma região está associado exatamente *um* vetor que tem $K$ como ponto inicial, então a coleção de todos esses vetores constitui um **campo vetorial**. A Figura 18.1 ilustra um campo vetorial definido por uma roda girando em torno de um eixo. A cada ponto da roda corresponde um vetor velocidade. Um campo vetorial deste tipo é um **campo de velocidade**. Pode também determinar um campo de velocidade o fluxo de água ou do vento. A Figura 18.2 exibe vetores velocidade associados a partículas fluídas em movimento em uma corrente. Ilustrações assim exibem apenas uns poucos vetores do campo vetorial. É preciso ter em mente que a *todo* ponto da região está associado um vetor.

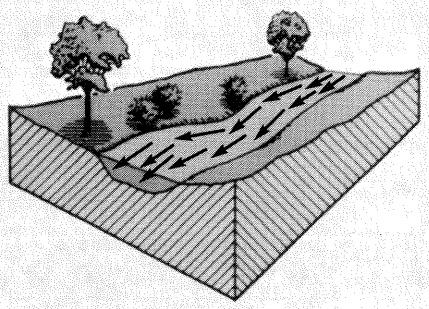


Figura 18.2

Um **campo de forças** é um campo vetorial em que a cada ponto está associado um vetor força. Os campos de força são comuns em estudos de mecânica e eletricidade. Em nossas ilustrações, admitimos que os vetores são independentes do tempo. Tais **campos vetoriais estacionários** são os únicos que estudaremos neste capítulo.

Dado um campo vetorial, introduzamos um sistema coordenado $xyz$ e denotemos por $\mathbf{F}(x, y, z)$ o vetor associado ao ponto $K(x, y, z)$ (ver Figura 18.3). Como os componentes de $\mathbf{F}(x, y, z)$ dependem das coordenadas $x$, $y$ e $z$ de $K$, podemos escrever

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

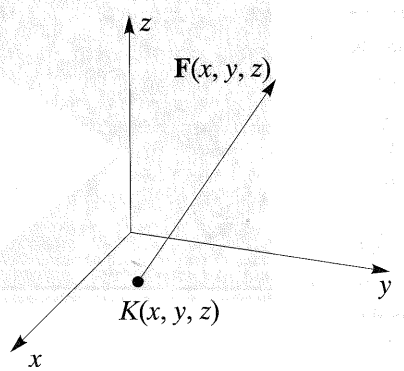



Figura 18.3

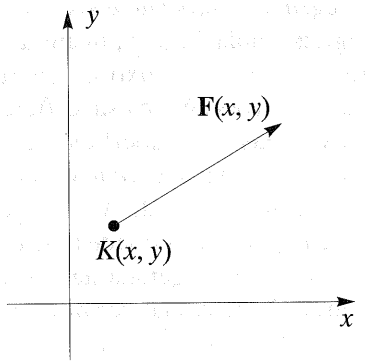



Figura 18.4

onde $M$, $N$ e $P$ são funções escalares. Reciprocamente, toda equação desse tipo define um campo vetorial. Assim, um campo vetorial pode ser encarado como uma função $\mathbf{F}$ do tipo indicado na definição seguinte.

**Definição (18.1)**

Um **campo vetorial em três dimensões** é uma função **F** cujo domínio $D$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e cujo contradomínio é um subconjunto de $V_3$. Se $(x, y, z)$ está em $D$, então

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

onde $M$, $N$ e $P$ são funções escalares.

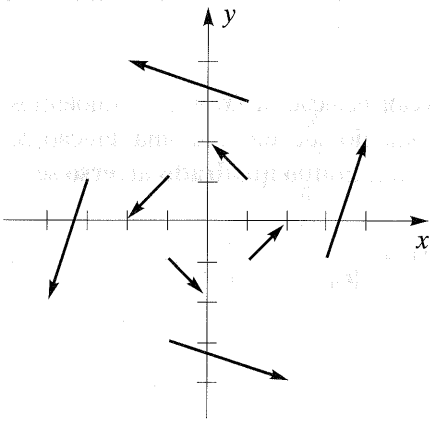



Figura 18.5

Como caso especial de (18.1), se o domínio $D$ corresponde a uma região no plano-$xy$ e se o contradomínio é um subconjunto de $V_2$ (ver Figura 18.4), então um **campo vetorial F em duas dimensões** é dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

onde $M$ e $N$ são funções escalares. Costumamos descrever um campo vetorial esboçando vetores que correspondam a $\mathbf{F}(x, y, z)$ ou a $\mathbf{F}(x, y)$ para pontos típicos $(x, y, z)$ ou $(x, y)$, conforme exemplo seguinte.

**EXEMPLO 1**

Descreva o campo vetorial **F** se $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

**SOLUÇÃO**

A tabela abaixo dá os vetores $\mathbf{F}(x, y)$ associados a diversos pontos $(x, y)$; tais vetores estão esboçados na Figura 18.5.

| $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ |
|---|---|
| $(1, 1)$ | $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$ |
| $(-1, 1)$ | $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$ |
| $(-1, -1)$ | $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ |
| $(1, -1)$ | $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ |

| $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ |
|---|---|
| $(1, 3)$ | $-3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ |
| $(-3, 1)$ | $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ |
| $(-1, -3)$ | $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ |
| $(3, -1)$ | $\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ |

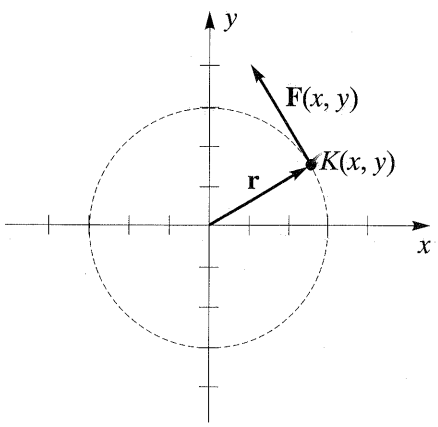



Figura 18.6

Os vetores são análogos aos associados à roda em movimento da Figura 18.1.

Para chegarmos a uma descrição geral do campo vetorial **F**, consideremos um ponto arbitrário $K(x, y)$ e seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ o vetor posição para $K(x, y)$ (ver Figura 18.6). $\mathbf{F}(x, y)$ parece ser ortogonal a **r**, sendo, assim, tangente ao círculo de raio $\|\mathbf{r}\|$ com centro na origem. Provamo-lo mostrando que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) = 0$, como a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\ &= -xy + yx = 0\end{aligned}$$

Notemos também que

$$\|\mathbf{F}(x, y)\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \|\mathbf{r}\|$$

Logo, o módulo de $\mathbf{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo. Isto implica que, quando o ponto $K(x, y)$ se move afastando-se da origem, o módulo de $\mathbf{F}(x, y)$ aumenta, como no caso da roda da Figura 18.1.

A próxima definição introduz um dos mais importantes campos vetoriais que ocorre nas ciências físicas.

**Definição (18.2)**

Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição de $(x, y, z)$ e denotemos por $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r}$ o vetor unitário que tem a mesma direção de $\mathbf{r}$. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é um **campo quadrado inverso** se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u} = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r},$$

onde $c$ é um escalar.

## EXEMPLO 2

Descreva o campo quadrado inverso $\mathbf{F}(x, y, z)$ de (18.2).

## SOLUÇÃO

Como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Podemos escrever a última expressão como em (18.1); entretanto, é mais simples analisar os vetores no campo utilizando $\mathbf{r}$. Se $c < 0$, então $\mathbf{F}(x, y, z)$ é um múltiplo escalar negativo de $\mathbf{r}$ e, então, $\mathbf{F}(x, y, z)$ está dirigido para a origem. Além disso, como

$$\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^3}\|\mathbf{r}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

o módulo de $\mathbf{F}(x, y, z)$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância de $O$ ao ponto $(x, y, z)$. Isto significa que, à medida que o ponto $K(x, y, z)$ se move afastando-se da origem, o módulo do vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$ diminui. A Figura 18.7(i) ilustra alguns vetores típicos para $c < 0$. Se $c > 0$, os vetores dirigem-se *a partir* da origem, conforme Figura 18.7(ii).

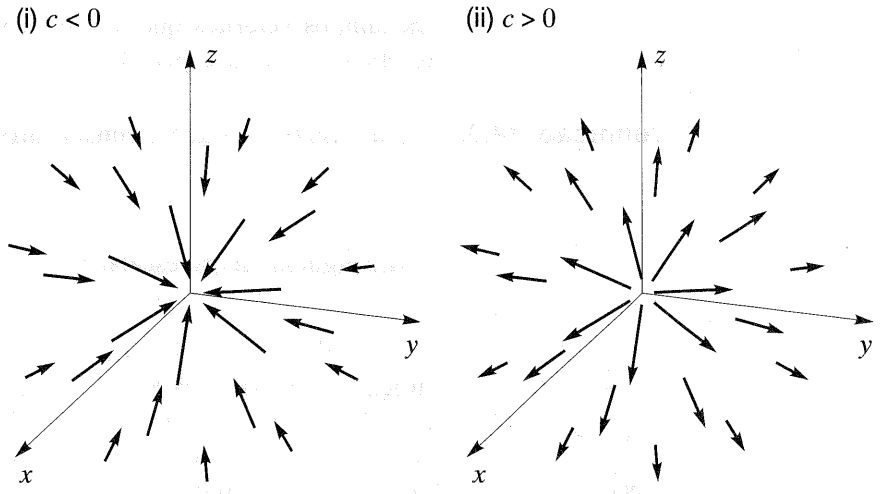



**Figura 18.7** Campos vetoriais quadrados inversos.

A força da gravidade determina campos vetoriais quadrados inversos. De acordo com a **lei da gravitação universal de Newton**, se uma partícula de massa $m_0$ está localizada na origem de um sistema coordenado $xyz$, então a força exercida sobre uma partícula de massa $m$ localizada em $K(x, y, z)$ é

$$\mathbf{F}(x,\ y,\ z) = -G\frac{m_0 m}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

onde $G$ é uma constante gravitacional, $\mathbf{r}$ é o vetor posição do ponto $K$ e $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r}$ é um vetor unitário.

Os campos quadrados inversos também ocorrem na teoria elétrica. A **lei de Coulomb** afirma que se uma carga pontual de $Q$ coulombs está situada na origem, então a força $\mathbf{F}(x, y, z)$ que ela exerce sobre uma carga pontual de $q$ coulombs localizada em $K(x, y, z)$ é

$$\mathbf{F}(x,\ y,\ z) = c\frac{Qq}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

onde $c$ é uma constante e $\mathbf{r}$ e $\mathbf{u}$ são os mesmos da Definição (18.2). Note que a lei de Coulomb tem a mesma forma da lei da gravitação universal de **Newton**.

Se $f$ é uma função de três variáveis, então, conforme (16.31),o *gradiente* de $f(x, y, z)$ é o campo vetorial definido como a seguir:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Os campos vetoriais que são gradientes de funções escalares recebem um nome especial.

**Definição (18.3)** Um campo vetorial **F** é **conservativo** se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$$

para alguma função escalar $f$.

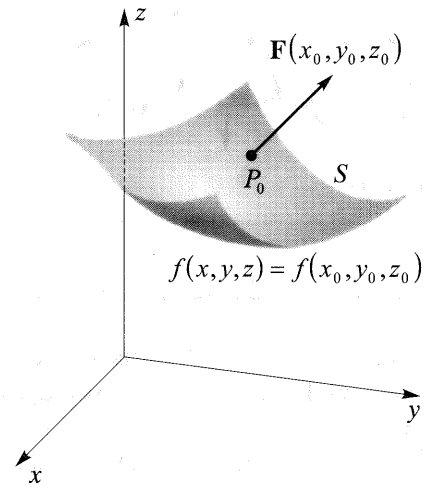



**Figura 18.8**

Se **F** é conservativo, então a função $f$ em (18.3) é chamada **função potencial** para **F** e $f(x, y, z)$ é o **potencial** no ponto $(x, y, z)$. Lembremos, do Teorema (16.36), que, se $(x_0, y_0, z_0)$ está no domínio de $\mathbf{F} = \nabla f$, então o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ é normal à superfície de nível $S$ de $f$ que contém $P_0$ $(x_0, y_0, z_0)$. A superfície $S$ é o gráfico da equação $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$. Assim, *todo vetor* $\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ *em um campo vetorial conservativo é normal à superfície de nível de uma função potencial* $f$ *para* **F** *que contém* $P_0(x_0, y_0, z_0)$. A Figura 18.8 ilustra um caso típico. Na Seção 16.6, provamos que $\|\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0\|$ é a taxa máxima de variação do potencial em $P_0$. Em aplicações onde $f(x, y, z)$ é a temperatura (ou potencial) em $(x, y, z)$, esta taxa máxima de variação de $f$ é normal à superfície isotérmica (ou equipotencial) que contém $P_0$.

O próximo teorema é importante nas aplicações.

**Teorema (18.4)** Todo campo vetorial quadrado inverso é conservativo.

## DEMONSTRAÇÃO

Se **F** é um campo quadrado inverso, então, como na solução do Exemplo 2,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

onde $c$ é uma constante. Pela Definição (18.3), se **F** é conservativo, então $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ para alguma função escalar $f$, e os componentes de **F** são $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ e $f_z(x, y, z)$, respectivamente. A integração parcial desses componentes em relação a $x$, $y$ e $z$, respectivamente, sugerem que

$$f(x, y, z) = \frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}},$$

O cálculo das derivadas parciais de $f$ prova que a suposição é correta. Temos o seguinte:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \nabla\left(-\frac{c}{r}\right)$$

onde $r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

As superfícies de nível para a função potencial $f$ do campo vetorial quadrado inverso $\mathbf{F}$ na demonstração do Teorema (18.4) são os gráficos de equações da forma

$$\frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = k$$

onde $k < 0$. Elevando ambos os membros ao quadrado e tomando os inversos, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{c^2}{k^2}$$

Assim, as superfícies de nível são esferas com centro na origem. Os vetores $\mathbf{F}(x, y, z)$ são ortogonais a essas esferas, sendo, pois, orientados para $O$ ou a partir de $O$, conforme Figura 18.7.

Na física, a função potencial de um campo vetorial conservativo $\mathbf{F}$ se define como a função $p$ tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla p(x, y, z)$. Neste caso, fazendo $p = -f$ na demonstração do Teorema (18.4), obtemos $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla(c/r)$. Aduziremos novas informações sobre campos vetoriais conservativos mais adiante neste capítulo. Em particular, na Seção 18.3, estudaremos um método para achar $f(x, y, z)$, dado $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

O operador diferencial vetorial $\nabla$ em três dimensões é

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Por (16.31), se $\nabla$ opera sobre uma função *escalar* $f$, produz o gradiente de $f$,

$$\nabla f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Aplicaremos a seguir o operador $\nabla$ a um campo *vetorial*, para definir outro campo vetorial chamado *rotacional* de $\mathbf{F}$, que denotaremos por rot $\mathbf{F}$, ou $\nabla \times \mathbf{F}$.

**Definição (18.5)**

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, onde $M$, $N$ e $P$ têm derivadas parciais em alguma região. O **rotacional** de $\mathbf{F}$ é dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Usaremos também o símbolo rot $\mathbf{F}$ ou $\nabla \times \mathbf{F}$ para denotar o vetor rot $\mathbf{F}(x, y, z)$ ou $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$ associado a $(x, y, z)$. A expressão de rot $\mathbf{F}$ pode escrever-se na forma de um determinante, como a seguir:

**Notação para rot F como determinante (18.6)**

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

A expressão à direita em (18.6) não é propriamente um determinante, pois a primeira linha é composta de vetores, a segunda linha de símbolos de derivação parcial e a terceira linha de funções escalares; todavia, constitui um dispositivo extremamente útil para rememorar a incômoda fórmula da Definição (18.5).

### EXEMPLO 3

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$, ache $\nabla \times \mathbf{F}$.

### SOLUÇÃO

Aplicando (18.6), temos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^4 & (2x^2y + z) & (y^3z^2) \end{vmatrix}$$

$$= (3y^2z^2 - 1)\mathbf{i} + 4xy^2z^3\mathbf{j} + (4xy - 2xyz^4)\,\mathbf{k}$$

Na Seção 18.7 veremos que, se $\mathbf{F}$ é o campo de velocidade de um fluido ou gás em movimento em um sistema-$xyz$, então rot $\mathbf{F}$ nos dá informações sobre aspectos rotacionais do movi-

mento. Se considerarmos um ponto $K(x, y, z)$ em que o fluido ou gás está rotando, ou "redemoinhando", então rot $\mathbf{F}$ está sobre o eixo de rotação (ver Figura 18.9) e pode ser usado para descrever propriedades rotacionais do campo.

Pode-se também utilizar o operador $\nabla$ para obter uma função *escalar* a partir de um campo vetorial $\mathbf{F}$, como a seguir.

**Definição (18.7)**

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, com $M$, $N$ e $P$ dotadas de derivadas parciais em alguma região. A **divergência** de $\mathbf{F}$, denotada por div $\mathbf{F}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{F}$ é dada por

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Usamos o símbolo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ para a divergência porque a fórmula pode ser obtida por meio do que *parece* ser o produto escalar de $\nabla$ e $\mathbf{F}$, como segue

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(M) + \frac{\partial}{\partial y}(N) + \frac{\partial}{\partial z}(P)$$

Tal como no próximo exemplo, usaremos o símbolo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ para denotar o valor funcional $(\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z)$. O valor de $\nabla \cdot \mathbf{F}$, ou div $\mathbf{F}$, em um ponto particular $k$, se denota por

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_K \text{ ou } [\text{div } \mathbf{F}]_k$$

## EXEMPLO 4

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$, ache $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

## SOLUÇÃO

Pela Definição (18.7),

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(y^3z^2)$$

$$= y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z$$

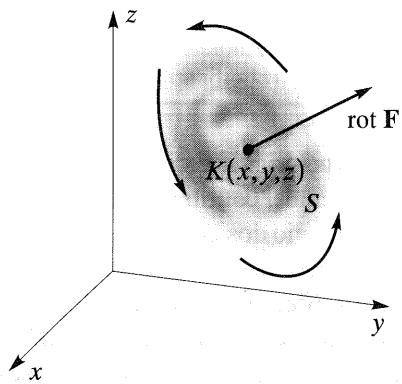



**Figura 18.9**

Na Seção 18.6 veremos que, se $\mathbf{F}$ é o campo de velocidade de um fluido ou gás, então div $\mathbf{F}$ nos informa sobre o fluxo de massa. Se $K$ é um ponto e $[\text{div } \mathbf{F}]_k < 0$, há maior quantidade de massa fluindo para o ponto do que saindo dele; dizemos que existe um **poço** em $K$. Se $[\text{div } \mathbf{F}]_k > 0$, flui maior quantidade de

massa de $K$ do que para $K$, há então uma **fonte** em $K$. Se $[\text{div } \mathbf{F}]_k = 0$, o que é verdadeiro para fluidos incompressíveis, não há poço nem fonte em $K$. Da mesma forma, se $\mathbf{F}$ representa o fluxo de calor e se $[\nabla \cdot \mathbf{F}]_k > 0$, então há uma fonte de calor em $K$ (isto é, o calor está *deixando* $K$ e, assim, a temperatura em $K$ está decrescendo). Se $[\nabla \cdot \mathbf{F}]_k < 0$, o calor está sendo *absorvido* em $K$ (a temperatura em $K$ está aumentando).

Podem-se estabelecer várias propriedades algébricas para *div* e *rot*. No próximo exemplo, abordamos uma propriedade análoga à regra do produto para derivadas. Outras propriedades constam dos Exercícios 23-26.

## EXEMPLO 5

Sejam $f$ uma função escalar e $\mathbf{F}$ uma função vetorial. Se as derivadas parciais existem, mostre que

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$$

## SOLUÇÃO

Escrevendo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, onde $M$, $N$ e $P$ são funções de $x$, $y$ e $z$, então

$$f\mathbf{F} = fM\mathbf{i} + fN\mathbf{j} + fP\mathbf{k}$$

Aplicando a Definição (18.7), obtemos

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(fM) + \frac{\partial}{\partial y}(fN) + \frac{\partial}{\partial z}(fP)$$

$$= f\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}M + f\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}N + f\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}P$$

Reagrupando os termos:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) + f\left(\frac{\partial f}{\partial x}M + \frac{\partial f}{\partial y}N + \frac{\partial f}{\partial z}P\right)$$

$$= f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$$

Finalmente, se um campo vetorial $\mathbf{F}$ é descrito como em (18.1), então podemos definir limites, continuidade, derivadas parciais e integrais múltiplas por meio dos componentes de $\mathbf{F}(x, y, z)$, como fizemos no caso de funções com valores vetoriais no Capítulo 15. Por exemplo, para diferenciar ou integrar $\mathbf{F}(x, y, z)$, diferenciamos ou integramos cada componente. Podemos estabelecer os teoremas usuais: $\mathbf{F}$ é contínua se e somente se as funções componentes $M$, $N$ e $P$ o são; $\mathbf{F}$ tem derivadas parciais se o mesmo ocorre com $M$, $N$ e $P$ etc.

## EXERCÍCIOS 18.1

**Exercs .1-10:** Trace um número suficiente de vetores para ilustrar o padrão dos vetores no campo **F**.

**1** $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ **2** $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

**3** $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ **4** $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

**5** $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

**6** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$

**7** $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

**8** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

**9** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ **10** $\mathbf{F}(x, y, z) = 2k$

**Exercs. 11-14:** Ache um campo vetorial conservativo que tenha o potencial indicado.

**11** $f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$

**12** $f(x, y, z) = \text{sen}\,(x^2 + y^2 + z^2)$

**13** $f(x, y) = \text{arctg}\,(xy)$

**14** $f(x, y) = y^2e^{-3x}$

**Exercs. 15-18:** Ache $\nabla \times \mathbf{F}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

**15** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + y^2x\mathbf{j} + (y + 2z)\mathbf{k}$

**16** $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + y)\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$

**17** $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xyz^2\mathbf{i} + y^2 \text{ sen } z\mathbf{j} + xe^{2z}\mathbf{k}$

**18** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \ln z\mathbf{i} + xe^{-y}\mathbf{j} - (y^2 + 2z)\mathbf{k}$

**19** Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, prove que

(a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ (c) $\nabla\|\mathbf{r}\| = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$

**20** Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\mathbf{a}$ é um vetor constante, prove que (a) rot $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$ (b) div $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$

**21** Prove que o rotacional e a divergência de um campo vetorial quadrado inverso são $\mathbf{0}$ e 0, respectivamente.

**22** Se um campo vetorial **F** é conservativo e tem derivadas parciais contínuas, prove que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

**Exercs. 23-26:** Verifique a identidade.

**23** $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$

**24** $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$

**25** $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

**26** $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$

**Exercs. 27-30:** Se $f$ e **F** têm derivadas parciais segundas contínuas e **a** é um vetor constante, verifique a identidade.

**27** rot grad $f = \mathbf{0}$

**28** div rot $\mathbf{F} = 0$

**29** rot (grad $f$ + rot **F**) = rot rot **F**

**30** rot $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

**31** Sejam $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $r = \|\mathbf{r}\|$. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = (c/r^k)\mathbf{r}$, onde $c$ e $k$ são constantes com $k > 0$, prove que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. (*Sugestão:* Use o Exercício 25.)

**32** Define-se o operador diferencial $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \partial z^2$$

Se $\nabla^2$ opera sobre $f(x, y, z)$, produz uma função escalar chamada *Laplaciano* de $f$, dada por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Se $f$ e $g$ são funções escalares dotadas de derivadas parciais segundas, prove que

(a) $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$

(b) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

**Exercs. 33-34:** Com a notação do Exercício 32, prove que a função verifica a *equação de Laplace* $\nabla^2 f = 0$. (Tais funções chamam-se *harmônicas* e desempenham papel importante em aplicações físicas).

**33** $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

**34** $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ para $a + b + c = 0$

**35** Se **F** é dada por (18.1), defina

$$\lim_{(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)} \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{a}$$

de maneira análoga à da Definição (15.4). Dê uma definição $\in - \delta$ deste limite. Qual o significado geométrico do limite?

**36** Se **F** é dada por (18.1), defina a noção de *continuidade* em $(x_0, y_0, z_0)$ de maneira análoga à da Definição (15.5). Qual é o significado geométrico de uma função vetorial contínua?

**Exercs. 37-38:** Estenda a $f(x, y, z)$ às fórmulas de aproximação dos Exercícios 67-68 da seção 16.3, e use $h = 0{,}05$ para aproximar $\nabla^2 f(0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}2)$.

**37** $f(x, y, z) = \dfrac{\text{tg}^2 \sqrt{xyz}}{\cos z \sec^2 (x^2y^2)}$

**38** $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + xy^2z + z^3}{4x^3 + 2y^2z + 4xz^2}$

## 18.2 INTEGRAIS CURVILÍNEAS

Para definir $\int_a^b f(x)\,dx$ no Capítulo 5, começamos dividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de amplitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Escolhemos então um número $w_k$ arbitrário em cada subintervalo e consideramos o limite de somas de Riemann $\sum_k f(w_k)\ \Delta x_k$ quando $\Delta x_k \to 0$. Pode-se usar processo análogo para definir *integrais curvilíneas* de funções de diversas variáveis ao longo de curvas em duas ou três dimensões.

Recordemos que uma curva plana é *suave* se admite uma parametrização

$$x = g(t),\ y = h(t);\ a \le t \le b$$

tal que $g'$ e $h'$ sejam contínuas e não simultaneamente nulas em $[a, b]$. Para curvas no espaço, consideramos uma terceira função $k$ do mesmo tipo com $z = k(t)$. A **direção positiva**, ou *orientação*, de $C$ é a direção definida pelos valores crescentes de $t$. A curva $C$ é *parcialmente suave* se $[a, b]$ pode ser particionado em subintervalos fechados tais que $C$ seja suave em cada subintervalo.

Suponhamos $f$ uma função de duas variáveis $x$ e $y$, contínua em uma região $D$ contendo uma curva suave $C$ com parametrização $x = g(t)$, $y = (t)$, $a \le t \le b$. Definiremos três integrais diferentes de $f$ ao longo de $C$. Comecemos particionando o intervalo $[a, b]$ do parâmetro, escolhendo

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

Denotaremos por $\|P\|$ a norma desta partição (ou seja, o comprimento do maior subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$). Se $P_k(x_k, y_k)$ é o ponto em $C$ correspondente a $t_k$, então os pontos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ dividem $C$ em $n$ partes $P_{k-1}P_k$, conforme ilustrado na Figura 18.10. Seja

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ \Delta s_k = \text{comprimento de } \overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$$

Para cada $k$, seja $Q_k(u_k, v_k)$ um ponto em $\overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$ obtido escolhendo-se um número em $[t_{k-1}, t_k]$ (ver Figura 18.10). Consideremos agora as três somatórias

$$\sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta s_k, \quad \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta x_k, \quad \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta y_k$$

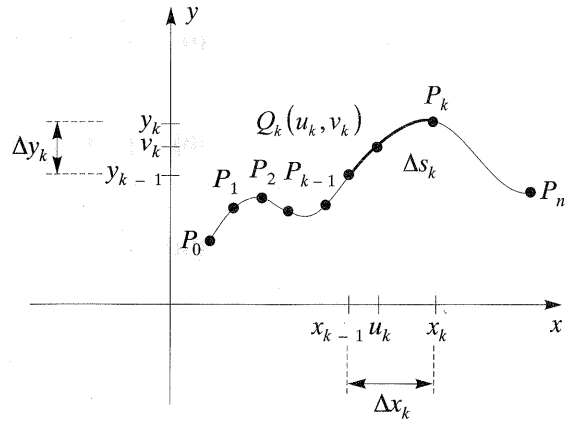



**Figura 18.10**

Se os limites de tais somatórias existem quando $\|P\| \to 0$, eles são as **integrais curvilíneas de $f$ ao longo de $C$** em relação a $s$, $x$ e $y$, respectivamente, e se denotam como a seguir.

**Integrais curvilíneas em duas dimensões (18.8)**

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta s_k$$

$$\int_C f(x,y)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta x_k$$

$$\int_C f(x,y)\,dy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta y_k$$

Se $f$ é contínua em $D$, então os limites em (18.8) existem e são os mesmos para toda parametrização de $C$ (desde que se adote a mesma orientação). Além disso, as integrais podem ser calculadas fazendo-se $x = g(t)$, $y = h(t)$ da parametrização de $C$ e substituindo as diferenciais por

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

$$dx = g'(t)\,dt, \quad dy = h'(t)\,dt$$

Note que, por (13.6), a fórmula de $ds$ é a diferencial do comprimento de arco. Para fins de referência, resumamos estes fatos como a seguir.

**Teorema de cálculo para integrais curvilíneas (18.9)**

Se uma curva suave $C$ é dada por $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$, e se $f(x, y)$ é contínua em uma região $D$ contendo $C$, então

**(i)** $$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(g(t), h(t))\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

**(ii)** $$\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(g(t), h(t))g'(t)\,dt$$

**(iii)** $$\int_C f(x, y)\,dy = \int_a^b f(g(t), h(t))h'(t)\,dt$$

O que precede pode ser estendido a curvas mais complicadas. Em particular, suponhamos $C$ uma curva parcialmente suave que possa expressar-se como a união de um número finito de curvas suaves $C_1, C_2, ..., C_n$, onde o ponto terminal de $C_k$ é o ponto inicial de $C_{k+1}$ para $k = 1, 2, ..., n-1$. Neste caso, a integral curvilínea de $f$ ao longo de $C$ define-se como a soma das integrais curvilíneas ao longo das curvas individuais.

Podem-se estabelecer, para integrais curvilíneas, propriedades análogas às obtidas para integrais definidas no Capítulo 5. Por exemplo, a inversão da direção de integração acarreta mudança do sinal da integral; a integral da soma de duas funções é a soma das integrais das funções individuais etc.

## EXEMPLO 1

Calcule $\int_C xy^2\,ds$ se $C$ admite a parametrização

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le \pi/2$$

## SOLUÇÃO

A curva $C$ é a porção, no primeiro quadrante, do círculo unitário de centro na origem, conforme se vê na Figura 18.11, onde a seta indica a orientação de $C$ e a direção de integração. Aplicando o Teorema (18.9), obtemos

$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\pi/2} \cos t\ \operatorname{sen}^2 t\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\ \cos t\,dt = \left[\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

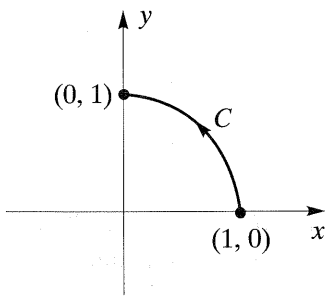



**Figura 18.11**

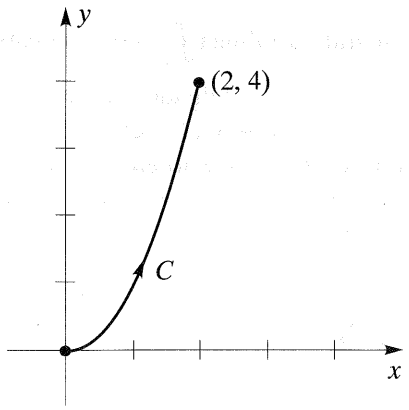



**Figura 18.12**

## EXEMPLO 2

Calcule $\int_C xy^2\,dx$ e $\int_C xy^2\,dy$ se $C$ é a parte da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (2, 4).

## SOLUÇÃO

A Figura 18.12 é o gráfico de $y = x^2$ de (0, 0) a (2, 4). As equações paramétricas de $C$ são

$$x = t,\ y = t^2;\ 0 \le t \le 2$$

As diferenciais são

$$dx = dt,\ dy = 2t\,dt$$

Aplicando o Teorema (18.9)(ii) e (iii), temos

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^2 t(t^2)^2\,dt = \int_0^2 t^5\,dt = \left[\tfrac{1}{6}t^6\right]_0^2 = \tfrac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^2 t(t^2)^2\,2t\,dt = \int_0^2 2t^6\,dt = \left[\tfrac{2}{7}t^7\right]_0^2 = \tfrac{256}{7}$$

Se, como no Exemplo 2, $C$ é o gráfico de uma equação $y = g(x)$ tal que $a \le x \le b$, então as equações paramétricas de $C$ são

$$x = t,\ y = g(t);\ a \le t \le b$$

Podemos então calcular como segue as integrais curvilíneas (ii) e (iii) do Teorema (18.9)

$$\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(t, g(t))\,dt = \int_a^b f(x, g(x))\,dx$$

$$\int_C f(x, y)\,dy = \int_a^b f(t, g(t))\,g'(t)\,dt = \int_a^b f(x, g(x))g'(x)\,dx$$

Isto mostra que, *para curvas dadas na forma* $y = g(x)$, $a \le x \le b$, *podemos evitar as equações paramétricas fazendo* $y = g(x)$, $dy = g'(x)\,dx$ *e então tomando a e b como limites de integração.* A título de ilustração, no Exemplo 2, onde $y = x^2$, poderíamos ter escrito

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^2 x(x^4)\,dx = \int_0^2 x^5\,dx = \tfrac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^2 x(x^4)2x\,dx = \int_0^2 2x^6\,dx = \tfrac{256}{7}$$

Uma aplicação física da integral curvilínea $\int_C f(x, y)$ consiste em considerar a curva como um fio delgado de arame de densidade variável. Se o arame é representado pela curva $C$ na Figura 18.10 e se a **densidade de massa linear** (massa por unidade de comprimento) no ponto $(x, y)$ é dada por $\delta(x, y)$, então $\delta(u_k, v_k)\,\Delta s_k$ é uma aproximação da massa $\Delta m_k$ da parte do arame entre $P_{k-1}$ e $P_k$. A soma

$$\sum_k \Delta m_k = \sum_k \delta(u_k, v_k)\, s_k$$

é uma aproximação da massa total $m$ do arame. Para definir $m$, tomamos o limite destas somas, obtendo o seguinte:

**Massa de um arame (18.10)**

$$m = \int_C \delta(x, y)\, ds$$

## EXEMPLO 3

Um arame delgado é vergado na forma de um semicírculo de raio $a$. Se a densidade de massa linear em um ponto $P$ é diretamente proporcional à sua distância da reta pelas extremidades, ache a massa do arame.

## SOLUÇÃO

Introduzamos um sistema de coordenadas tal que a forma do arame coincida com a metade superior de um círculo de raio $a$ e centro na origem (ver Figura 18.13). As equações paramétricas de $C$ são

$$x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le \pi$$

Por hipótese, a densidade de massa linear em $P(x, y)$ é dada por $\delta(x, y) = ky$, onde $k$ é uma constante. Por (18.10), a massa do arame é

$$m = \int_C (ky)\, ds = \int_0^{\pi} (ka \operatorname{sen} t)\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (ka \operatorname{sen} t)a\, dt$$

$$= ka^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt$$

$$= ka^2 \left[ -\cos t \right]_0^{\pi} = 2ka^2$$

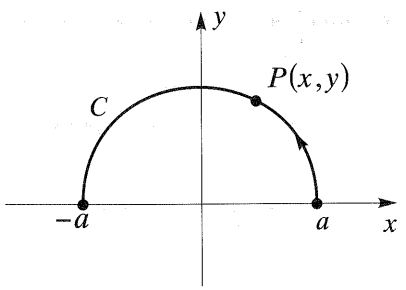



**Figura 18.13**

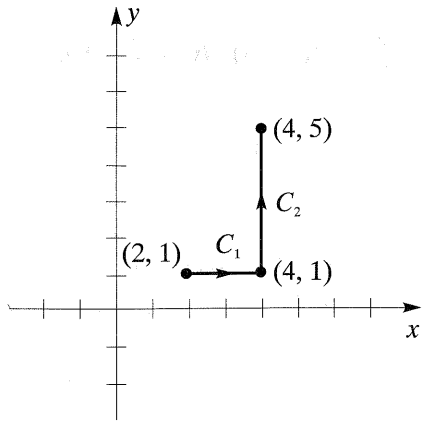



**Figura 18.14**

Em aplicações que envolvem trabalho, as integrais curvilíneas costumam aparecer em forma da combinação

$$\int_C M(x, y)\, dx + \int_C N(x, y)\, dy$$

onde as funções $M$ e $N$ são contínuas em um domínio $D$ que contém $C$. Costuma-se abreviar esta soma como

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y) dy$$

## EXEMPLO 4

Calcule $\int xy\, dx + x^2\, dy$ se

**(a)** $C$ consiste em segmentos de reta de (2, 1) a (4, 1) e de (4, 1) a (4, 5)

**(b)** $C$ é o segmento de reta de (2, 1) a (4, 5)

**(c)** as equações paramétricas de $C$ são

$$x = 3t - 1,\ y = 3t^2 - 2t;\ 1 \le t \le \tfrac{5}{3}$$

## SOLUÇÃO

**(a)** Subdividindo $C$ em duas partes $C_1$ e $C_2$, conforme Figura 18.14, as equações paramétricas dessas curvas são

$$C_1\colon\ x = t,\ y = 1;\ 2 \le t \le 4$$

$$C_2\colon\ x = 4,\ y = t;\ 1 \le t \le 5$$

A integral curvilínea ao longo de $C$ pode expressar-se como a soma de duas integrais curvilíneas, a primeira ao longo de $C_1$ e a segunda ao longo de $C_2$. Sobre $C_1$ temos $dy = 0$, $dx = dt$ e, então,

$$\int_{C_1} xy\ dx + x^2\ dy = \int_2^4 t(1)\ dt + t^2(0) = \left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_2^4 = 6$$

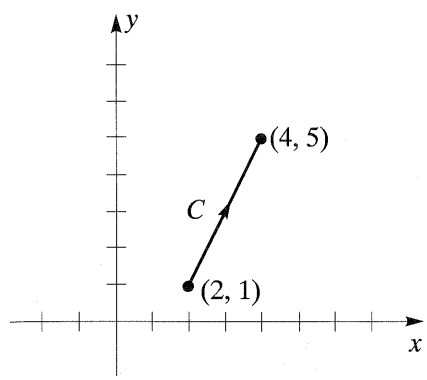



**Figura 18.15**

Sobre $C_2$ temos $dx = 0$, $dy = dt$ e, portanto,

$$\int_{C_2} xy\, dx + x^2\, dy = \int_1^5 4t(0)\, dt + 16\, dt = 16\left[t\right]_1^5 = 64$$

Conseqüentemente, o valor da integral curvilínea ao longo de $C$ é 6 + 64 ou 70.

**(b)** A Figura 18.15 ilustra o gráfico de $C$. A equação de $C$ é $y = 2x - 3$, com $2 \le x \le 4$. Neste caso, $dy = 2\, dx$ e

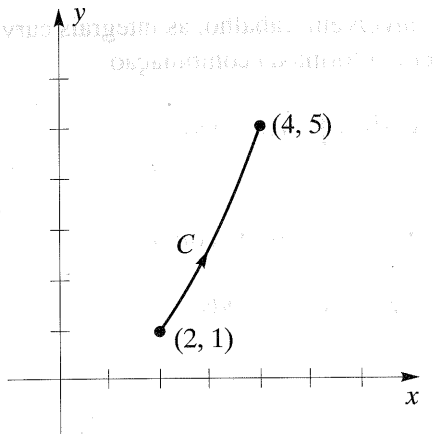



**Figura 18.16**

$$\int_C xy\ dx + x^2\ dy = \int_2^4 x(2x - 3)\ dx + x^2(2)\ dx$$

$$= \int_2^4 (4x^2 - 3x)\ dx = \frac{170}{3}$$

**(c)** O gráfico de $C$ é parte de uma parábola (ver Figura 18.16). Neste caso, com as equações paramétricas $x = 3t - 1$, $y = 3t^2 - 2t$; $1 \le t \le \frac{5}{3}$, obtemos $dx = 3\ dt$, $dy = (6t - 2)\ dt$ e a integral curvilínea é igual a

$$\int_1^{5/3} (3t - 1)(3t^2 - 2t)3\ dt + (3t - 1)^2(6t - 2)\ dt$$

Pode-se mostrar que o valor é 58.

Outro método de resolução consiste em utilizar a equação $y = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$ para a parábola, com $2 \le x \le 4$. Obtemos então a integral

$$\int_C xy\ dx + x^2\ dy = \int_2^4 x \cdot \tfrac{1}{3}(x^2 - 1)\ dx + x^2(\tfrac{2}{3}x)\ dx$$

$$= \int_2^4 (x^3 - \tfrac{1}{3}x)\ dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{6}x^2\right]_2^4 = 58$$

---

No exemplo precedente, obtivemos três valores diferentes para a integral curvilínea ao longo de três caminhos diversos de (2, 1) a (4, 5). Na Seção 18.3 estudaremos integrais curvilíneas que têm o *mesmo* valor ao longo de *qualquer* curva que una dois pontos $A$ e $B$. Para tais integrais, utilizamos a expressão *independente do caminho*.

Se uma curva suave $C$ em três dimensões tem a parametrização

$$x = g(t),\ y = h(t),\ z = k(t);\ a \le t \le b$$

então definem-se as integrais curvilíneas de uma função $f$ de três variáveis da mesma maneira que no caso de uma função de duas variáveis. Neste caso, em lugar de tomar $(x_k, y_k)$ e $(u_k, v_k)$ como as coordenadas de $P_k$ e $Q_k$ em $C$, conforme Figura 18.10, tomamos $(x_k, y_k, z_k)$ e $(u_k, v_k, w_k)$, respectivamente (ver Figura 18.17). Temos agora

$$\int_C f(x, y, z)\ ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k)\ \Delta s_k$$

Esta integral pode ser calculada utilizando-se a fórmula

$$\int_a^b f(g(t),\ h(t),\ k(t)\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2 + [k'(t)]^2}\ dt$$

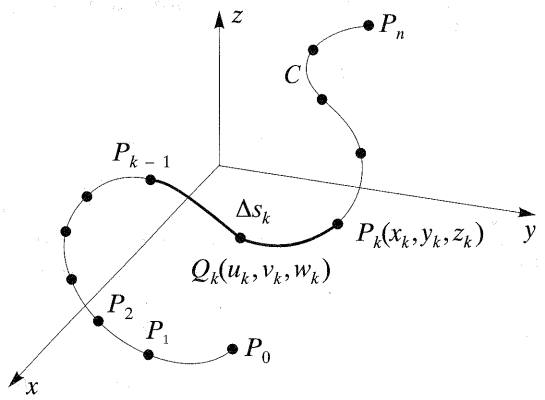



**Figura 18.17**

Se um arame tem a forma de C e se $f(x, y, z)$ é a densidade de massa linear em $(x, y, z)$, então o valor desta integral é a massa total do arame.

Além das integrais curvilíneas $\int_C f(x, y, z)\ dx$ e $\int_C f(x, y, z)\ dy$, uma função de três variáveis também tem uma integral curvilínea em relação a $z$, dada por

$$\int_C f(x, y, z)\ dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k)\ \Delta z_k$$

onde $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Tal como em duas dimensões, estas integrais curvilíneas costumam aparecer em forma de somas, que abreviamos para

$$\int_C M(x, y, z)\ dx + N(x, y, z)\ dy + P(x, y, z)\ dz$$

onde as funções $M$, $N$ e $P$ são contínuas em toda uma região contendo $C$. Se $C$ é dada parametricamente, então esta integral curvilínea pode ser calculada substituindo-se $x$, $y$ e $z$ da mesma forma que no caso de duas variáveis.

## EXEMPLO 5

Calcule $\int_C yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz$ se $C$ é dada por

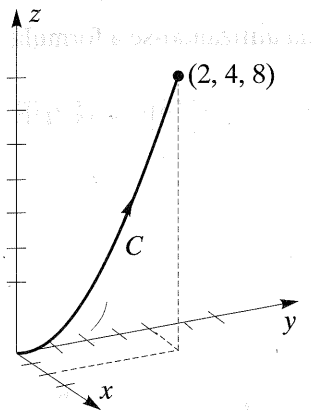



**Figura 18.18**

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ 0 \le t \le 2$$

## SOLUÇÃO

A curva $C$ (uma cúbica reversa) está ilustrada na Figura 18.18. Substituímos $x$, $y$ e $z$ e fazemos $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$, $dz = 3t^2\,dt$:

$$\int_0^2 t^5\,dt + 2t^5\,dt + 3t^3\,dt = \int_0^2 6t^5\,dt = \left[t^6\right]_0^2 = 64$$

---

Uma das mais importantes aplicações físicas das integrais curvilíneas envolve campos de força. Suponhamos que a força que atua sobre o ponto $(x, y, z)$ seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

onde $M$, $N$ e $P$ são funções contínuas. Formularemos uma definição para o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de $\mathbf{F}(x, y, z)$ se move ao longo de uma curva suave $C$ que tem a parametrização

$$x = g(t),\quad y = h(t),\quad z = k(t);\quad a \le t \le b$$

Suponhamos que o movimento se processe na direção definida pelos valores crescentes de t.

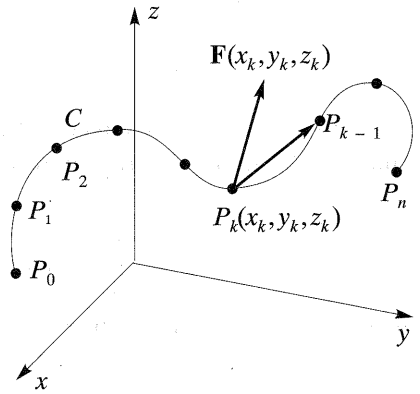



**Figura 18.19**

Subdividamos $C$ por pontos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, onde $P_k$ tem coordenadas $(x_k, y_k, z_k)$ (ver Figura 18.19). Se a norma $\|P\|$ é pequena, então $P_k$ está próximo de $P_{k+1}$ para cada $k$. Logo, o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ de $P_k$ a $P_{k+1}$ pode ser aproximado pelo trabalho $\Delta W_k$ realizado pela força *constante* $\mathbf{F}(x, y, z)$ quando seu ponto de aplicação se move ao longo de $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$. Se $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, e $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, então $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ corresponde ao vetor $\Delta x_k\,\mathbf{i} + \Delta y_k\,\mathbf{j} + \Delta z_k\,\mathbf{k}$ (ver Figura 18.20). Por (14.26), o trabalho $\Delta W_k$ realizado por $\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ ao longo de $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ é

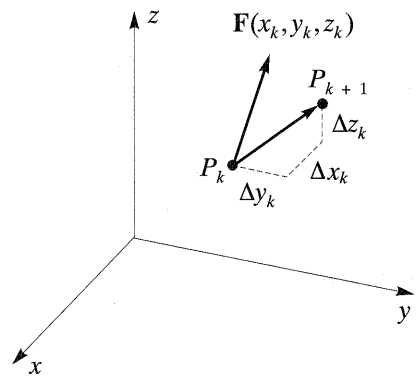



**Figura 18.20**

$$\Delta W_k = \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot (\Delta x_k\mathbf{i} + \Delta y_k\,\mathbf{j} + \Delta z_k\mathbf{k})$$

$$= M(x_k, y_k, z_k)\,\Delta x_k + N(x_k, y_k, z_k)\,\Delta y_k + P(x_k, y_k, z_k)\,\Delta z_k$$

Define-se como a seguir o **trabalho $W$ realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de $C$.**

**Definição de trabalho (18.11)**

$$W = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \Delta W_k$$
$$= \int_C M(x, y, z)\, dx + N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz$$

Para fins de aplicação, a integral (18.11) é em geral expressa em forma vetorial. Fazendo

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

onde $x = g(t)$, $y = h(t)$ e $z = k(t)$, então $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição do ponto $Q(x, y, z)$ em $C$. Se s é o parâmetro comprimento de arco para $C$, então, conforme Seção 15.4, o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ a $C$ em $Q$ é

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{r}(t) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

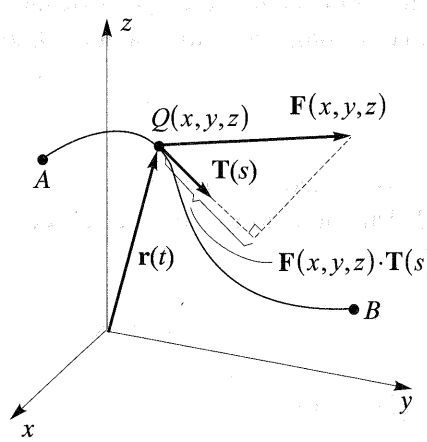



**Figura 18.21**

A Figura 18.21 ilustra os vetores $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{T}(s)$.

O **componente tangencial de F em $Q$** (ver Figura 18.21) é

$$\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(s) = M(x, y, z)\frac{dx}{ds} + N(x, y, z)\frac{dy}{ds} + P(x, y, z)\frac{dz}{ds}$$

Note que este componente é positivo se o ângulo entre $\mathbf{F}(x, y, z)$ e $\mathbf{T}(s)$ é agudo, e negativo se é obtuso. Podemos agora reescrever a Fórmula (18.11) como segue:

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(s)\, ds$$

Assim, *o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *se move ao longo de C é igual à integral curvilínea, em relação a s, do componente tangencial de* **F** *ao longo de C.* Para simplificar a notação, denotaremos $\mathbf{F}(x, y, z)$ por **F** e $\mathbf{T}(s)$ por **T**, e faremos

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \mathbf{T}\, ds$$

O que acabamos de ver pode resumir-se como a seguir.

**Definição (18.12)**

Sejam $C$ uma curva suave no espaço, **T** um vetor tangente unitário a $C$ em $(x, y, z)$ e **F** a força que atua em $(x, y, z)$. O **trabalho $W$ realizado por F ao longo de $C$** é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Intuitivamente, podemos encarar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ na Definição (18.12) com o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de $\mathbf{F}$ move ao longo do vetor $\mathbf{dr}$ tangente a $C$. O sinal de integral representa o limite de somas de elementos $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de trabalho.

## EXEMPLO 6

Se um campo de forças inverso F é dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^3}\,\mathbf{r}$$

onde $k$ é uma constante, ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ quando o ponto de aplicação se move ao longo do eixo-$x$ de $A(1, 0, 0)$ a $B(2, 0, 0)$.

## SOLUÇÃO

Seja $C$ o segmento de $A$ a $B$. As equações paramétricas de $C$ são $x = t$, $y = 0$, $z = 0$; $1 \le t \le 2$. Tal como no Exemplo 2 da Seção 18.1.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Aplicando a Definição (18.12), temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

Substituindo $x$, $y$ e $z$ das equações paramétricas de $C$, temos

$$W = \int_1^2 \frac{k}{(t^2)^{3/2}}\,t\,dt = \int_1^2 \frac{k}{t^2}\,dt = \left[-\frac{k}{t}\right]_1^2 = \frac{k}{2}$$

A unidade de $W$ depende das unidades da distância e de $\|\mathbf{F}(x, y, z)\|$.

---

Restringindo o estudo acima a duas dimensões, um campo de forças pode ser expresso na forma

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

Se $C$ é uma curva plana, finita, parcialmente suave, o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de $\mathbf{F}(x, y)$ se move ao longo de $C$ é

$$W = \int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

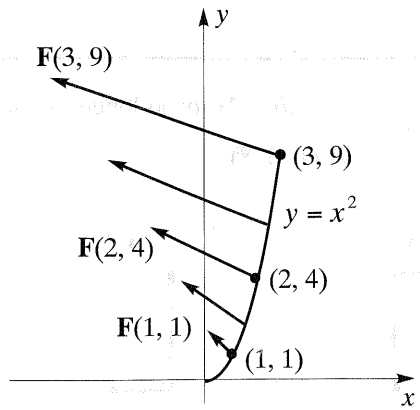



**Figura 18.22**

## EXEMPLO 7

Seja $C$ a parte da parábola $y = x^2$ entre (0, 0) e (3, 9). Se $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ é uma força que atua em (x, y), ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de $C$ de

**(a)** (0, 0) a (3,9) **(b)** (3, 9) a (0, 0)

## SOLUÇÃO

O campo vetorial $\mathbf{F}$ já foi estudado no Exemplo 1 da Seção 18.1. A Figura 18.22 exibe alguns vetores força típicos atuando ao longo de $C$. Por exemplo,

$$\mathbf{F}(1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}(2, 4) = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}(3, 9) = -9\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Note a mudança de direção e do módulo de $\mathbf{F}(x, y)$ entre (0, 0) e (3, 9).

**(a)** Com a parametrização $x = t$, $y = t^2$ $0 \le t \le 3$, obtemos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C -y\,dx + x\,dy$$

$$= \int_0^3 -t^2\,dt + t(2t)\,dt = \int_0^3 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

Se, por exemplo, $\|\mathbf{F}\|$ é em quilogramas e s em metros, então $W = 9$m–kg.

**(b)** Poderíamos utilizar a parametrização $x = -t$, $y = t^2$, $-3 \le t \le 0$, para $C$ e calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, entretanto, é mais simples inverter os limites de integração em (a), o que nos dá $W = -9$.

---

Podemos dar a seguinte interpretação à significação da diferença de sinal entre 9 e –9 nas soluções (a) e (b) do Exemplo 7. Em (a), imaginemos uma partícula em movimento através do campo de força $\mathbf{F}$ ao longo do caminho $y = x^2$ de (0, 0) a (3, 9). A partícula move-se em direção nordeste, e os vetores força atuam nessa direção. O ângulo $\theta$ entre $\mathbf{F}(x, y)$ e um vetor tangente ao caminho (na direção do movimento) é sempre agudo e, assim, $\mathbf{F}$ facilita o movimento da partícula. O trabalho realizado por $\mathbf{F}$ é, pois, positivo.

Em (b), a partícula move-se de (3, 9) a (0, 0) em direção sudoeste. O ângulo $\theta$ é sempre obtuso, e $\mathbf{F}$ retarda o movimento da partícula. Assim, o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ é negativo.

## EXERCÍCIOS 18.2

**Exercs. 1-2:** Calcule as integrais curvilíneas $\int_C f(x,y)\,ds$, $\int_C f(x,y)\,dx$, e $\int_C f(x,y)\,dy$ para $C$ com a parametrização dada.

**1** $f(x,y) = x^3 + y$, $x = 3t$, $y = t^3$; $0 \le t \le 1$

**2** $f(x,y) = xy^{2/5}$, $x = \frac{1}{2}t$, $y = t^{5/2}$; $0 \le t \le 1$

**Exercs. 3-6:** Calcule a integral curvilínea ao longo de $C$.

**3** $\int_C 6x^2y\,dx + xy\,dy$;

$C$ e o gráfico de $y = x^3 + 1$ de $(-1, 0)$ a $(1, 2)$.

**4** $\int_C y\,dx + (x+y)\,dy$;

$C$ é o gráfico de $y = x^2 + 2x$ de $(0, 0)$ a $(2, 8)$.

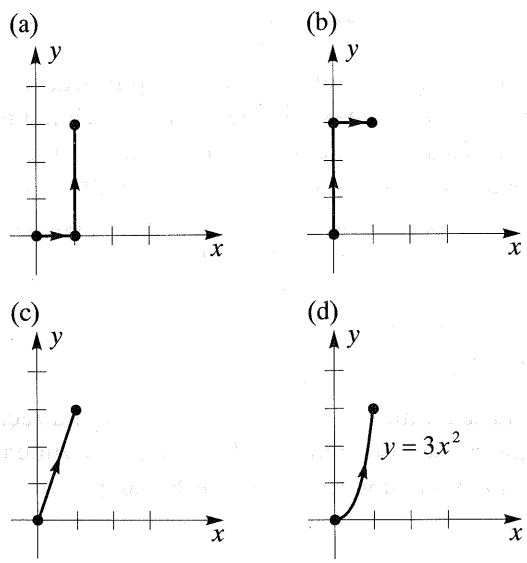
**5** $\int_C (x-y)\,dx + x\,dy$;

$C$ é o gráfico de $y^2 = x$ de $(4, -2)$ a $(4, 2)$.

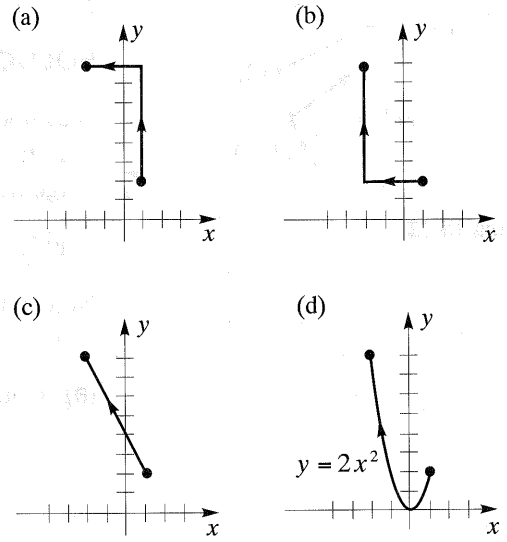
**6** $\int_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$;

$C$ é o gráfico de $x = y^3$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

**7** Calcule $\int_C xy\,dx + (x+y)\,dy$ ao longo de cada curva $C$ de $(0, 0)$ a $(1, 3)$.




**8** Calcule $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 2x\,dy$ ao longo de cada curva $C$ de $(1, 2)$ a $(-2, 8)$.




**9** Calcule $\int_C xz\,dx + (y+z)\,dy + x\,dz$ se $C$ é o gráfico de $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = e^{2t}$; $0 \le t \le 1$.

**10** Calcule $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ se $C$ é o gráfico de $x = \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$; $0 \le t \le \pi/2$.

**11** Calcule $\int_C (x+y+z)\,dx + (x-2y+3z)\,dy + (2x+y-z)\,dz$, onde C é a curva de $(0, 0, 0)$ a $(2, 3, 4)$, se

(a) $C$ consiste em três segmentos de reta, o primeiro paralelo ao eixo-$x$, o segundo paralelo ao eixo-$y$ e o terceiro paralelo ao eixo-$z$.

(b) $C$ consiste em três segundo de reta, o primeiro paralelo ao eixo-$z$, o segundo paralelo ao eixo-$x$ e o terceiro paralelo ao eixo-$y$.

(c) $C$ é um segmento retilíneo

**12** Calcule $\int_C (x-y)\,dx + (y-z)\,dy + x\,dz$ se $C$ é a curva de $(1, -2, 3)$ a $(-4, 5, 2)$ do tipo descrito em (a)-(c) do Exercício 11.

**13** Calcule $\int_C xyz\ ds$ se $C$ é o segmento retilíneo de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

**14** Calcule $\int_C (xy + z)\ ds$ se $C$ é a hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$; $0 \le t \le 2\pi$.

**15** Se a força em $(x, y)$ é $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$, ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo das curvas (a)-(d) do Exercício 7.

**16** Se a força em $(x, y)$ é $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$ ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo das curvas (a)-(d) do Exercício 8.

**17** A força que atua em um ponto $(x, y)$ de um plano coordenado é $\mathbf{F}(x, y) = (4/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$, com $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo da metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ de $(-a, 0)$ a $(a, 0)$.

**18** A força em um ponto $(x, y)$ de um plano coordenado é dada por $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y)$ ao longo do gráfico de $y = x^3$ de $(0, 0)$ a $(2, 8)$.

**19** A força em um ponto $(x, y, z)$ em três dimensões é dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ ao longo da cúbica reversa $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ de $(0, 0, 0)$ a $(2, 4, 8)$.

**20** Faça o Exercício 19 se $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$.

**21** Se um objeto se move através de um campo de força $\mathbf{F}$ de modo que em cada ponto $(x, y, z)$ seu vetor velocidade seja ortogonal a $\mathbf{F}(x, y, z)$, mostre que o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre o objeto é 0.

**22** Se uma força constante $\mathbf{c}$ atua sobre um objeto em movimento quando ele percorre uma vez um círculo, mostre que o trabalho realizado por $\mathbf{c}$ sobre o objeto é 0.

**23** Se um arame delgado tem a forma de uma curva plana $C$ e se a densidade de massa linear em $(x, y)$ é $\delta(x, y)$, então os *momentos em relação aos eixos* $x$ e $y$ se definem como

$$M_x = \int_C y\delta(x, y)\ ds \text{ e } M_y = \int_C x\delta(x, y)\ ds$$

Utilize limites de somas para mostrar que estas são as definições naturais de $M_x$ e $M_y$. O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ do arame é definido por $\bar{x} = M_y/m$ e $\bar{y} = M_x/m$, onde $m$ é a massa do arame. Ache o centro de massa do arame no Exemplo 3.

**24** Ref. Exercício 23. Um arame delgado está situado em um plano coordenado de modo que sua forma coincide com a parte da parábola $y = 4 - x^2$ entre $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. A densidade no ponto $(x, y)$ é diretamente proporcional à sua distância do eixo-$y$. Ache a massa e o centro de massa.

**25** Estenda a três dimensões as definições de momentos e centro de massa (ver Exercício 23).

**26** Um arame de densidade constante é curvado em forma de hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$; $0 \le t \le 3\pi$. Ache a massa e o centro de massa do arame (ver Exercício 25).

**27** Se um arame delgado de densidade variável é representado por uma curva $C$ no plano-$xy$, defina os momentos de inércia $I_x$ e $I_y$ em relação aos eixos $x$ e $y$, respectivamente. Ache $I_x$ e $I_y$ para o arame do Exemplo 3.

**28** Ache os momentos de inércia $I_x$ e $I_y$ do arame do Exercício 24.

**29** Se um arame delgado de densidade variável é representado por uma curva em três dimensões, defina os momentos de inércia em relação aos eixos $x$, $y$ e $z$.

**30** Para o arame do Exercício 26, ache o momento de inércia em relação ao eixo-$z$ (ver também Exercício 29).

**31** Se $C$ é o gráfico de $y = x^4$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, aproxime $\int_C \operatorname{sen}(xy)\ dx$ utilizando

$$\sum_{k=1}^{10} \operatorname{sen}(u_k v_k)\ \Delta x_k$$

com $\Delta x_k = \frac{1}{10}$ e $u_k = \frac{1}{10}k - \frac{1}{20}$

**32** Se $C$ é o gráfico de $y = 3x + 4$ de $(1, 7)$ a $(2, 10)$, obtenha uma aproximação de $\int_C \ln\sqrt{xy}\ dy$ utilizando

$$\sum_{k=1}^{10} \ln\sqrt{u_k v_k}\ \Delta y_k$$

com $\Delta y_k = \frac{3}{10}$ e $u_k = \frac{19}{20} + \frac{1}{10}k$.

## 18.3 INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO

Costuma-se chamar *caminho* de $A$ e $B$ uma curva (parcialmente) suave de $A$ e $B$. Vamos agora estabelecer condições para que uma integral curvilínea seja *independente do caminho* em uma região, no sentido de que, se $A$ e $B$ são pontos arbitrários, então obtemos o mesmo valor para qualquer caminho de $A$ a $B$ naquela região. Estabeleceremos os resultados para integrais curvilíneas em duas dimensões. Para o caso de três dimensões, as demonstrações são análogas, sendo, assim, omitidas.

Se a integral curvilínea $\int_C f(x, y)\, ds$ é independente do caminho, podemos denotá-la por $\int_A^B f(x, y)\, ds$, pois o valor da integral depende apenas dos extremos $A$ e $B$ da curva $C$. Utiliza-se notação análoga para $\int_C f(x, y)\, dx$, $\int_C f(x, y)\, dy$, e integrais curvilíneas em três dimensões.

Em toda esta seção admitiremos que as regiões sejam **conexas**, isto é, dois pontos quaisquer da região podem ser ligados por uma curva (parcialmente) suave, inteiramente contida na região. O próximo teorema constitui um resultado fundamental sobre a independência do caminho.

**Teorema (18.13)**

Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ é contínua em uma região conexa aberta $D$, então a integral curvilínea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho se e somente se $\mathbf{F}$ é conservativo, ou seja, $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ para alguma função escalar $f$.

### DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos a integral independente do trajeto em $D$. Se $(x_0, y_0)$ é um ponto fixo em $D$, definamos $f$ como

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para todo ponto $(x, y)$ em $D$. Mostraremos que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Como a integral é independente do caminho, $f$ depende somente de $x$ e $y$, e não do caminho $C$ de $(x_0, y_0)$ a $(x, y)$. Escolhamos um círculo $D$ com centro $(x, y)$ e seja $(x_1, y)$ um ponto interior ao círculo tal que $x_1 \neq x$. De acordo com a Figura

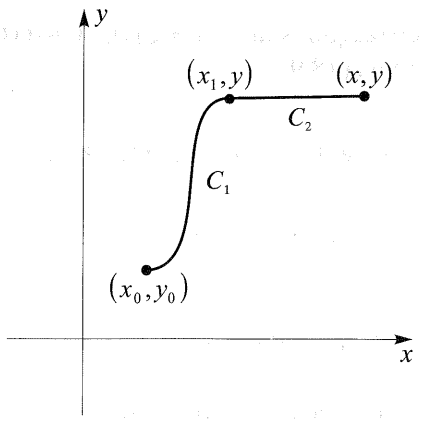



Figura 18.23

18.23, se $C_1$ é um caminho arbitrário de $(x_0, y_0)$ a $(x_1, y)$ e $C_2$ é o segmento horizontal de $(x_1, y)$ a $(x, y)$, então

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como a primeira integral não depende de $x$,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Escrevendo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ e notando que $dy = 0$ em $C_2$ (ver Figura 18.23), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} M(x, y)\, dx$$

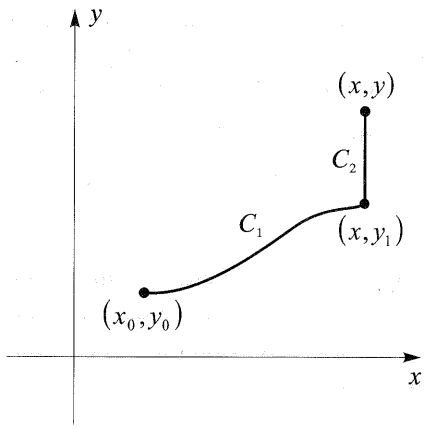



Figura 18.24

Como $y$ é fixo nesta diferenciação parcial, podemos encarar o integrando como uma função de uma variável $x$. Aplicando (5.35), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = M(x, y)$$

Analogamente, escolhendo o caminho da Figura 18.24 e diferenciando em relação a $y$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = N(x, y)$$

Isto prova que $\nabla f(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y)$, c.q.d.

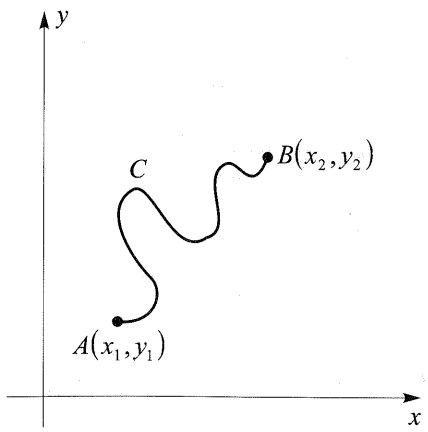



Figura 18.25

Reciprocamente, se existe uma função $f$ tal que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, então

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

Logo $M(x, y) = f_x(x, y)$ e $N(x, y) = f_y(x, y)$.

Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos da região $D$ e se $C$ é uma curva arbitrária parcialmente suave com extremidades $A$ e $B$ (ver Figura 18.25), então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

$$= \int_C f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy$$

Se $C$ admite a parametrização suave $x = g(t)$, $y = h(t)$; $t_1 \le t \le t_2$, então, pelo Teorema (18.9),

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ f_x(g(t), h(t))\, g'(t) + f_y(g(t), h(t))\, h'(t) \right] dt$$

Aplicando a regra da cadeia e o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(g(t), h(t))]\, dt \\ &= f(g(t_2), h(t_2)) - f(g(t_1), h(t_1)) \\ &= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \\ &= \left[ f(x, y) \right]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \end{aligned}$$

onde o último par de colchetes é usado de maneira análoga ao caso de uma variável. Assim, a integral curvilínea depende somente das coordenadas de $A$ e $B$, e não do caminho $C$, isto é, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho. A prova pode ser estendida a curvas parcialmente suaves subdividindo-se $C$ em um número finito de arcos suaves.

A demonstração do Teorema (18.13) encerra um método para calcular integrais curvilíneas que não dependem do caminho. Podemos enunciar como segue este resultado, que é análogo ao teorema fundamental do cálculo.

**Teorema (18.14)**

Seja $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ contínua em uma região conexa aberta $D$, e seja $C$ uma curva parcialmente suave em $D$ com extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Se $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, então

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \left[ f(x, y) \right]_{(x_1, y_1))}^{(x_2, y_2)} \end{aligned}$$

Se uma integral curvilínea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, então, pelo Teorema (18.14) com $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ vemos que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *para toda curva fechada simples* $C$.

**EXEMPLO 1**

Seja $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$.

**(a)** Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho.

**(b)** Calcule $\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

## SOLUÇÃO

**(a)** Pelo Teorema (18.13), a integral curvilínea é independente do caminho se e somente se existe uma função diferenciável $f$ de $x$ e $y$ tal que $\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$, isto é,

$$f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$$

ou, equivalentemente,

$$(*) \qquad f_x(x, y) = 2x + y^3 \text{ e } f_y(x, y) = 3xy^2 + 4$$

Integrando (parcialmente) $f_x(x, y) = 2x + y^3$ em relação a $x$, obtemos

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + g(y),$$

onde $g$ é uma função de $y$ somente. (Devemos tomar $g(y)$ em lugar de uma constante de integração, a fim de obter a expressão *mais geral* para $f(x, y)$ tal que $f_x(x, y) = 2x+y^3$.)

Diferenciamos em seguida $f(x, y) = x^2 + xy^3 + g(y)$ em relação a $y$ e comparamos o resultado com a expressão $f_y(x, y) = 3xy^2 + 4$ em (*). Assim,

$$f_y(x, y) = 0 + 3xy^2 + g'(y) = 3xy^2 + 4$$

e, então,

$$g'(y) = 4$$

Integrando em relação a $y$, obtemos

$$g(y) = 4y + c,$$

onde $c$ é uma constante de integração. Assim,

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y + c$$

é uma função $f$ tal que $= \nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$.

**(b)** Como qualquer função potencial serve para calcular a integral, aplicamos o Teorema (18.14) com $f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y$, obtendo

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Big[ f(x,y) \Big]_{(0,1)}^{(2,3)}$$

$$= \Big[ x^2 + xy^3 + 4y \Big]_{(0,1)}^{(2,3)}$$

$$= (4 + 54 + 12) - 4 = 66$$

O resultado seguinte é uma aplicação do que acabamos de ver aos campos vetoriais conservativos.

**Teorema (18.15)**

**Se $\mathbf{F}$ é um campo de forças conservativo em duas dimensões, então o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de qualquer caminho $C$ de $A\ (x_1, y_1)$ a $B\ (x_2, y_2)$ é igual à diferença de potenciais entre $A$ e $B$.**

## DEMONSTRAÇÃO

Se $\mathbf{F}$ é conservativo, então $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ para alguma função potencial $f$. Pela Definição (18.12) e pelo Teorema (18.14), o trabalho $W$ realizado ao longo de qualquer caminho de $A\ (x_1, y_1)$ a $B\ (x_2, y_2)$ é

$$W = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

que é a diferença dos potenciais entre $A$ e $B$.

A Figura 18.26 ilustra o teorema precedente para curvas parcialmente suaves $C_1$, $C_2$ e $C_3$. Realiza-se a mesma quantidade de trabalho, qualquer que seja o caminho escolhido de $A$ a $B$. Se $C$ é uma curva fechada – isto é, se $A = B$ – então a diferença de potencial é 0 e, assim, o trabalho realizado ao percorrer $C$ é 0. Uma recíproca deste resultado também é verdadeira, a saber, se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples $C$, então a integral curvilínea é independente do caminho e, assim, o campo é conservativo. Tais fatos têm importância em aplicações, pois muitos campos vetoriais que ocorrem na natureza são campos quadrados inversos e, assim, conservativos (ver Teorema (18.4)). Em termos físicos, se uma partícula unitária dá uma volta completa em uma curva fechada em um campo conservativo, então o trabalho realizado é 0. Abordaremos os campos conservativos com mais detalhes no final desta seção.

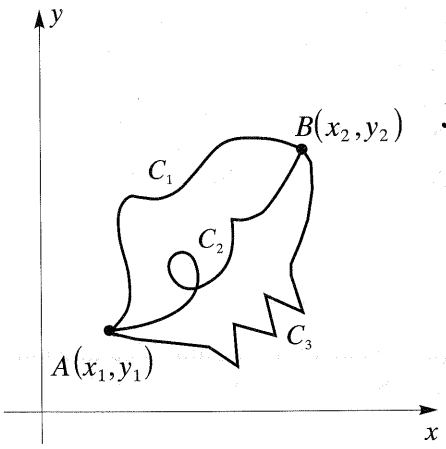



**Figura 18.26**

Os teoremas (18.14) e (18.15) podem ser estendidos a um campo vetorial em três dimensões. O próximo exemplo ilustra estes resultados.

## EXEMPLO 2

Seja $\mathbf{F}$ o campo gravitacional de uma partícula de massa $m_0$ situada na origem de um sistema coordenado $xyz$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ quando uma partícula de massa $m$ se move de $A$ (2, 3, 4) a $B$ (1, 0, 0).

## SOLUÇÃO

Como foi visto na Seção 18.1, a força exercida por uma partícula de massa $m$ situada em $K(x, y, z)$ é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -G\frac{m_0 m}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Tal como na demonstração do Teorema (18.4), $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{Gm_0 m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Logo, pela extensão dos Teoremas (18.14) e (18.15) a três dimensões,

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[ \frac{Gm_0 m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{(2, 3, 4)}^{(1, 0, 0)}$$
$$= Gm_0 m \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{29}} \right)$$

---

Se a integral $\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ é independente do caminho, então, pelo Teorema (18.13), existe uma função $f$ tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Conseqüentemente $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$.

Se $M$ e $N$ têm derivadas parciais primeiras contínuas, então $f$ tem derivadas parciais segundas contínuas e, assim, a ordem de diferenciação é irrelevante, isto é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

A recíproca deste resultado é falsa, a menos que imponhamos restrições adicionais ao domínio $D$ de $\mathbf{F}(x, y)$. Em particular, se

$D$ é uma **região simplesmente conexa**, no sentido de que toda curva fechada simples $C$ em $D$ inclui somente pontos de $D$ (isto é, não há buracos na região), então a condição $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ implica que a integral curvilínea $\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ é independente do caminho. (A demonstração encontra-se em livros de cálculo avançado.) O que acabamos de ver pode ser resumido como a seguir.

**Teorema (18.16)**

Se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ têm derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa $D$, então a integral curvilínea

$$\int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

é independente do caminho em $D$ se e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

## EXEMPLO 3

Mostre que a integral curvilínea

$$\int_C (e^{3y} - y^2 \operatorname{sen} x)dx + (3xe^{3y} + 2y \cos x)\, dy$$

é independente do caminho em uma região simplesmente conexa.

## SOLUÇÃO

Fazendo

$$M = e^{3y} - y^2 \operatorname{sen} x \text{ e } N = 3xe^{3y} + 2y \cos x$$

vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3\, e^{3y} - 2y \operatorname{sen} x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo, pelo Teorema (18.16), a integral curvilínea independente do caminho.

---

## EXEMPLO 4

Determine se a integral $\int_C x^2y\, dx + 3xy^2\, dy$ é independente do caminho.

## SOLUÇÃO

Fazendo $M = x^2y$ e $N = 3xy^2$, obtemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

Como $\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$, a integral não é independente do caminho, de acordo com o Teorema 18.16.

---

No Exemplo 1, determinamos uma função potencial $f$ para um campo vetorial conservativo de duas dimensões. O próximo exemplo ilustra uma técnica análoga para o caso de três dimensões.

## EXEMPLO 5

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos x\mathbf{i} + (2y \operatorname{sen} x + e^{2z})\mathbf{j} + 2ye^{2z}\mathbf{k}$.

**(a)** Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, e ache uma função potencial $f$ para $\mathbf{F}$.

**(b)** Se $\mathbf{F}$ é um campo de forças, ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de qualquer curva $C$ de $(0, 1, \frac{1}{2})$ a $(\pi/2, 3, 2)$.

## SOLUÇÃO

**(a)** A integral será independente do caminho se existir uma função diferenciável $f$ de $x$, $y$ e $z$ tal que $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$, isto é,

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{aligned} f_x(x, y, z) &= y^2 \cos x \\ f_y(x, y, z) &= 2y \operatorname{sen} x + e^{2z} \\ f_z(x, y, z) &= 2ye^{2z} \end{aligned}$$

Integrando (parcialmente) $f_x(x, y, z)$ em relação a $x$, vemos que

$$\textbf{(2)} \qquad f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + g(y, z)$$

para alguma função $g$ de $y$ e $z$. (Devemos tomar $g(y, z)$ para obter a expressão mais geral $f(x, y, z)$ tal que $f_x(x, y, z) = y^2 \cos x$.)

Diferenciando $f(x, y, z)$ em (2) em relação a $y$ e comparando o resultado com a expressão de $f_y(x, y, z)$ em (1), obtemos

$$f_y(x, y, z) = 2y \operatorname{sen} x + gy(y, z) = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z}$$

e então

$$g_y(y, z) = e^{2z}$$

A integração parcial de $g_y(y, z)$ em relação a $y$ dá

$$g(y, z) = ye^{2z} + h(z)$$

onde $h$ á uma função da única variável $z$. Aplicando a fórmula (2), obtemos

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + h(z)$$

Diferenciando a expressão precedente em relação a $z$ e comparando o resultado com a fórmula de $f_z(x, y, z)$ em (1), temos

$$f_z(x, y, z) = 2ye^{2z} + h'(z) = 2ye^{2z}$$

Segue-se que $h'(z) = 0$ ou $h(z) = c$ para alguma constante $c$. Assim,

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + c$$

é uma função potencial $f$ de $\mathbf{F}$.

**(b)** Aplicando a extensão do Teorema (18.15) aos campos vetoriais em três dimensões, concluímos que o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de qualquer curva $C$ de $(0, 1, \frac{1}{2})$ a $(\pi/2, 3, 2)$ é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Big[ y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} \Big]_{(0, 1, 1/2)}^{(\pi/2, 3, 2)}$$
$$= (9 + 3e^4) - (0 + e) = 9 + 3e^4 - e \approx 170$$

---

Concluiremos esta seção abordando algumas aplicações da independência do caminho. A próxima definição é utilizada na física.

**Definição (18.17)**

Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial de forças conservativo com função potencial $f$. A **energia potencial** $p(x, y, z)$ de uma partícula no ponto $(x, y, z)$ é

$$p(x, y, z) = -f(x, y, z)$$

Como a energia potencial é o negativo do potencial $f(x, y, z)$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla p(x, y, z)$$

Se $A$ e $B$ são dois pontos, então, como no Teorema (18.15), o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de uma curva suave $C$ com extremidades $A$ e $B$ é

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Big[ -p(x, y, z) \Big]_A^B = p(A) - p(B)$$

onde $p(A)$ e $p(B)$ denotam a energia potencial em $A$ e em $B$, respectivamente. Assim, o trabalho $W$ é a diferença das energias potenciais em $A$ e $B$. Em particular, se $B$ é um ponto em que o potencial é 0, então $W = p(A)$, o que está de acordo com a descrição física clássica da energia potencial como o tipo de energia que um corpo tem em virtude de sua posição.

Se uma partícula tem massa $m$ e velocidade $v$, então sua **energia cinética** é $\frac{1}{2} mv^2$. Assim, a energia cinética é a energia que um corpo tem em virtude de sua velocidade e sua massa.

Vamos estabelecer a seguinte lei física fundamental, que constitui a razão por que certos campos vetoriais são chamados *conservativos*.

**Lei da conservação da energia (18.18)**

Se uma partícula move-se de um ponto para outro em um campo vetorial de forças conservativo, então a soma das energias cinética e potencial permanece constante, isto é, a energia total não varia.

## DEMONSTRAÇÃO

Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial conservativo, e suponhamos que uma partícula se mova de $A$ até $B$ ao longo de uma curva $C$ parcialmente suave tal que, no instante $t$, sua posição seja dada por $x = g(t), y = h(t), z + k(t); a \le t \le b$. Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição da partícula (ver Figura 18.27), então a velocidade e a aceleração no instante $t$ são

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

onde escrevemos abreviadamente $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{a}$ em lugar de $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$, respectivamente. A velocidade (módulo) da partícula é $v(t) = v = \|\mathbf{v}\|$. O trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ ao longo de $C$ é

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left( \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\, dt$$

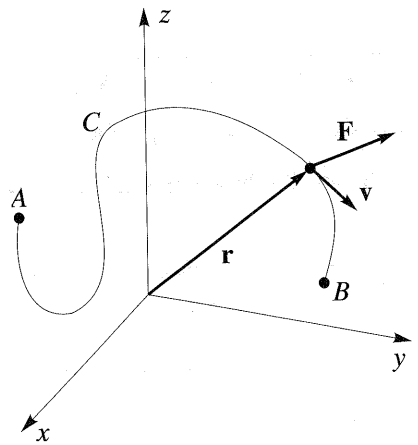



**Figura 18.27**

Pela segunda lei do movimento de Newton (15.13),

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

e então

$$W = \int_a^b \left( m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt$$

$$= m\int_a^b \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt = m\int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\, dt$$

$$= \frac{1}{2}m\int_a^b \frac{d}{dt}(v^2)\, dt = \frac{1}{2}m\left[ v^2 \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2$$

Como a energia cinética $K$ de uma partícula de massa m e velocidade $v$ é $\frac{1}{2}mv^2$, a última igualdade pode ser escrita

$$W = K(B) - K(A)$$

onde $K(A)$ e $K(B)$ denotam a energia cinética da partícula em $A$ e em $B$, respectivamente. Pelo que vimos em seguida à Definição (18.17), $W = p(A) - p(B)$, e então

$$p(A) - p(B) = K(B) - K(A)$$

ou

$$p(A) + K(A) = p(B) + K(B)$$

A última fórmula afirma que se uma partícula se move de um ponto a outro em um campo vetorial conservativo, a soma da energia potencial e energia cinética permanece constante.

## EXERCÍCIOS 18.3

**Exercs.1-10:** Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, determinando uma função potencial $f$ para $\mathbf{F}$.

**1** $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y + 2)\mathbf{i} + (x^3 + 4y^3)\mathbf{j}$

**2** $\mathbf{F}(x, y) = (6xy^2 + 2y)\mathbf{i} + (6x^2y + 2x)\mathbf{j}$

**3** $\mathbf{F}(x, y) = (2x \operatorname{sen} y + 4e^x)\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j}$

**4** $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^{2y} + 4y^3)\mathbf{i} + (2x^2e^{2y} + 12xy^2)\mathbf{j}$

**5** $\mathbf{F}(x, y) = -2y^3 \operatorname{sen} x\mathbf{i} + (6y^2 \cos x + 5)\mathbf{j}$

**6** $\mathbf{F}(x, y) = (5y^3 + 4y^3 \sec^2 x)\mathbf{i} + (15xy^2 + 12y^2 \operatorname{tg} x)\mathbf{j}$

**7** $\mathbf{F}(x, y, z) = 8xz\mathbf{i} + (1 - 6yz^3)\mathbf{j} + (4x^2 - 9y^2z^2)\mathbf{k}$

**8** $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

**9** $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \sec^2 x - ze^x)\mathbf{i} + \operatorname{tg} x\mathbf{j} - e^x\mathbf{k}$

**10** $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x \operatorname{sen} z\mathbf{i} - 2y \operatorname{sen} z\mathbf{j} + (x^2 \cos z - y^2 \operatorname{sen} z)\mathbf{k}$

**Exercs. 11-14:** Mostre que a integral curvilínea é independente do caminho e ache seu valor.

**11** $\int_{(-1, 2)}^{(3, 1)} (y^2 + 2xy)\, dx + (x^2 + 2xy)\, dy$

**12** $\int_{(0, 0)}^{(1, \pi/2)} e^x \operatorname{sen} y\, dx + e^x \cos y\, dy$

**13** $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} (6xy^3 + 2z^2)dx + 9x^2y^2dy + (4xz + 1)dz$

**14** $\int_{(4,0,3)}^{(-1,1,2)} (yz + 1)\,dx + (xz + 1)\,y + (xy + 1)\,dz$

**Exercs. 15-18:** Use o Teorema (18.16) para mostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho.

**15** $\mathbf{F}(x, y) = 4xy^3\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j}$

**16** $\mathbf{F}(x, y) = (6x^2 - 2xy^2)\mathbf{i} + (2x^2y + 5)\mathbf{j}$

**17** $\mathbf{F}(x, y) = e^x\mathbf{i} + (3 - e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$

**18** $\mathbf{F}(x, y) = y^3 \cos x\mathbf{i} - 3y^2 \operatorname{sen} x\mathbf{j}$

**19** Se $\int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$ é independente do caminho e $M$, $N$ e $P$ têm derivadas parciais primeiras contínuas, prove que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

**Exercs. 20-22:** Use o Exercício 19 para mostrar que a integral curvilínea não é independente do caminho.

**20** $\int_C 5y\,dx + 5x\,dy + yz^2\,dz$

**21** $\int_C 2xy\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + yz\,dz$

**22** $\int_C e^y \cos z\,dx + xe^y \cos z\,dy + xe^y \operatorname{sen} z\,dz$

**23** Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ uma força dirigida diretamente para a origem com módulo inversamente proporcional à distância da origem. Prove que $\mathbf{F}$ é conservativa, achando uma função potencial $f$ para $\mathbf{F}$.

**24** Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ uma força emanando da origem com módulo diretamente proporcional à distância da origem. Prove que $\mathbf{F}$ é conservativa achando uma função potencial $f$ para $\mathbf{F}$.

**25** Se $\mathbf{F}$ é uma força constante, prove que o trabalho realizado ao longo de uma curva arbitrária com extremidades $P$ e $Q$ é $\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

**26** Se $\mathbf{F}(x, y, z) = g(x)\mathbf{i} + h(y)\mathbf{j} + k(z)\mathbf{k}$, onde $g$, $h$ e $k$ são funções contínuas, mostre que $\mathbf{F}$ é conservativo.

**27** Seja $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, onde

$$M(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ e } N(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Mostre que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ para todo $(x, y)$ no domínio $D$ de $\mathbf{F}$, mas que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho em $D$. (*Sugestão:* Considere dois semicírculos diferentes com extremidades $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Por que este fato não contradiz o Teorema (18.16)?

**28** Suponha que um satélite de massa $m$ esteja circulando em torno da terra a uma altitude constante de $h$ quilômetros e que complete uma revolução a cada $k$ minutos. Se o raio da Terra é de 6.300 quilômetros, ache o trabalho realizado pelo campo gravitacional da Terra durante um intervalo arbitrário de tempo.

**29** Seja $\mathbf{F}$ um campo quadrado inverso tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = (c/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$ para $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, onde $c$ é uma constante. Sejam $P_1$ e $P_2$ pontos cujas distâncias da origem são $d_1$ e $d_2$, respectivamente. Expresse, em termos de $d_1$ e $d_2$, o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de uma curva parcialmente suave unindo $P_1$ a $P_2$.

**30** Suponha que quando uma partícula se move em um campo vetorial conservativo, sua energia potencial decresça à taxa de $k$ unidades por segundo. A que taxa a energia cinética está variando?

## 18.4 O TEOREMA DE GREEN

Seja $C$ uma curva plana suave com parametrização $x = g(t)$, $y = h(t)$; $a \le t \le b$. Recorde que, se $A = (g(a), h(a)) = (g(b), h(b)) = B$, então $C$ é uma curva suave *fechada*. Se $C$ não se intercepta entre $A$ e $B$, é uma curva *simples*. Os círculos e as elipses são exemplos comuns de curvas suaves fechadas simples. Uma *curva fechada simples parcialmente suave* é uma união finita de curvas suaves $C_k$ tais que, quando $t$ varia de $a$ a $b$, o ponto $P(t)$ obtido com as parametriações das curvas $C_k$ percorrem $C$ exatamente uma vez,

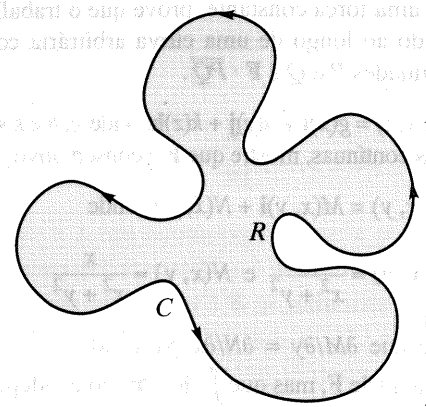



Figura 18.28

com a única exceção que $P(a) = P(b)$. Uma curva deste tipo constitui a fronteira de uma região $R$ do plano-$xy$ e, por definição, a **orientação**, ou **direção positiva**, ao longo de $C$ é tal que $R$ esteja sempre à *esquerda* quando $P(t)$ descreve $C$, conforme ilustrado pelas setas na Figura 18.28. A notação

$$\oint_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

denota uma integral curvilínea ao longo de uma curva fechada simples $C$ uma vez na direção positiva.

O próximo teorema, designado em homenagem ao matemático inglês George Green (1793-1841), define uma relação entre a integral curvilínea ao longo de $C$ e uma integral dupla sobre $R$. Para simplificar o enunciado, usamos no integrando os símbolos $M$, $N$, $\partial N/\partial x$ e $\partial M/\partial y$ para denotar os valores dessas funções em $(x, y)$.

**Teorema de Green (18.19)**

Seja $C$ uma curva fechada simples parcialmente suave e seja $R$ a região que consiste em $C$ e seu interior. Se $M$ e $N$ são funções contínuas com derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região $D$ contendo $R$, então

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

## DEMONSTRAÇÃO PARA UM CASO ESPECIAL

Demonstraremos o teorema para o caso em que $R$ é uma região $R_x$ *e* uma região $R_y$ dos seguintes tipos:

$$R = \{(x, y): a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

$$R = \{(x, y): c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

onde $g_1$, $g_2$, $h_1$ e $h_2$ são funções suaves. Basta mostrar que cada uma das seguintes igualdades é verdadeira, pois a soma delas dá a conclusão desejada:

**(1)** $$\oint_C M\,dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dA$$

**(2)** $$\oint_C N\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dA$$

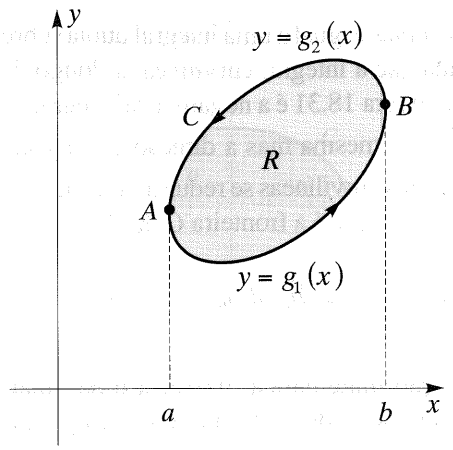



**Figura 18.29**

Para provar (1), referimo-nos à Figura 18.29 e notamos que $C$ consiste em duas curvas $C_1$ e $C_2$ de equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente. A integral curvilínea $\oint_C M\,dx$ pode escrever-se

$$\oint_C M\,dx = \int_{C_1} M(x,y)\,dx + \int_{C_2} M(x,y)\,dx$$

$$= \int_a^b M(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, g_2(x))\,dx$$

$$= \int_a^b M(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b M(x, g_2(x))\,dx$$

Aplicamos em seguida o Teorema (17.8)(i) à integral dupla $\iint_R (\partial M/\partial y)\,dA$, obtendo

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx$$

$$= \int_a^b \Big[ M(x,y) \Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))]\,dx$$

Comparando a última expressão com a obtida para $\oint_C M\,dx$ temos (1).

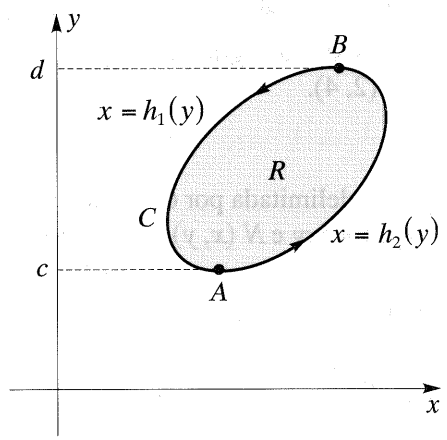



**Figura 18.30**

Estabelece-se de modo análogo a fórmula em (2), considerando a Figura 18.30.

Embora não o demonstremos aqui, o teorema de Green pode estender-se a uma região $R$ tal que parte da fronteira consista em segmentos retilíneos horizontais ou verticais. O teorema pode então estender-se ainda mais para o caso em que $R$ é uma união finita de tais regiões. Por exemplo, Se $R = R_1 \cup R_2$ e se a fronteira de $R_1$ é $C_1 \cup C'_1$ e a fronteira de $R_2$ é $C_2 \cup C'_2$, conforme ilustrado na Figura 18.31, então

$$\iint_{R_1} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy\,dx = \oint_{C_1 \cup C'_1} M\,dx + N\,dy$$

$$\iint_{R_2} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy\,dx = \oint_{C_2 \cup C'_2} M\,dx + N\,dy$$

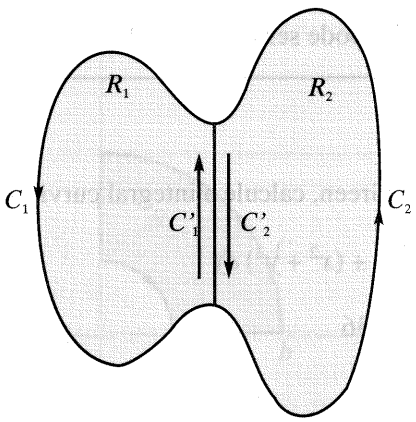



**Figura 18.31**

A soma das duas integrais duplas é igual a uma integral dupla sobre $R$. Observemos em seguida que a integral curvilínea ao longo de $C'_1$ na direção indicada na Figura 18.31 é a negativa da integral ao longo de $C'_2$, pois a curva é a mesma mas a direção é a oposta. Logo, a soma das duas integrais curvilíneas se reduz a uma integral curvilínea ao longo de $C_1 \cup C_2$, que é a fronteira $C$ de $R$. Assim

$$\iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy\ dx = \oint_C M\ dx + N\ dy$$

Podemos agora, por indução matemática, passar a uma união arbitrária, finita. A demonstração do teorema de Green para o caso mais geral ultrapassa o âmbito deste livro.

## EXEMPLO 1

Por meio do teorema de Green, calcule $\oint_C 5xy\ dx + x^3\ dy$, onde $C$ é a curva fechada que consiste nos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$ entre os pontos (0, 0) e (2, 4).

## SOLUÇÃO

A Figura 18.32 exibe a região $R$ delimitada por $C$. Aplicando o teorema de Green com $M(x, y) = 5xy$ e $N(x, y) = x^3$, temos

$$\begin{aligned}
\oint_C 5xy\ dx + x^3\ dx &= \iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(5xy) \right] dA \\
&= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x)\ dy\ dx \\
&= \int_0^2 \left[ 3x^2y - 5xy \right]_{x^2}^{2x} dx \\
&= \int_0^2 (11x^3 - 10x^2 - 3x^4)\ dx = -\frac{28}{15}
\end{aligned}$$

A integral curvilínea também pode ser calculada diretamente.

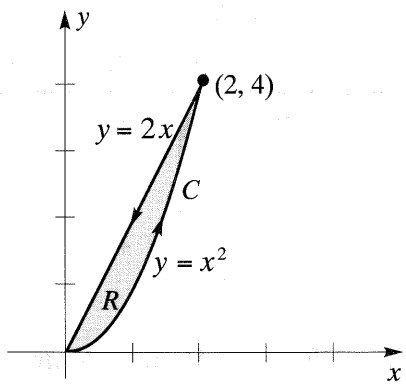



**Figura 18.32**

## EXEMPLO 2

Com auxílio do teorema de Green, calcule a integral curvilínea

$$\oint_C 2xy\ dx + (x^2 + y^2)\ dy$$

onde $C$ é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$

## SOLUÇÃO

A Figura 18.33 ilustra a região $R$ delimitada por $C$. Aplicando o teorema de Green, com $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = x^2 + y^2$, temos

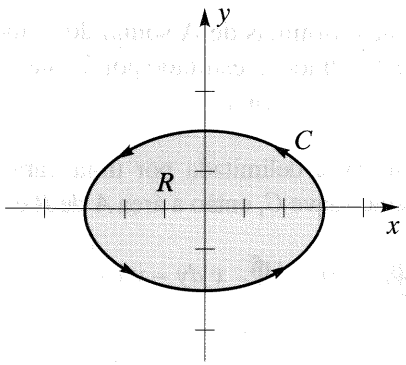



Figura 18.33

$$\oint_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = \iint_R (2x - 2x)\,dA$$
$$= \iint_R 0\,dA = 0$$

Note que não utilizamos a curva $C$ no cálculo. Pode-se mostrar que a integral curvilínea é independente do caminho, sendo, assim, 0 para toda curva fechada simples $C$ (ver observação após o Teorema (18.14)).

---

## EXEMPLO 3

Calcule $\oint_C (4 + e^{\sqrt{x}})\,dx + (\operatorname{sen} y + 3x^2)\,dy$ se $C$ é a fronteira da região $R$ delimitada pelos quartos de círculo de raios $a$ e $b$ e pelos segmentos dos eixos-$x$ e $y$, conforme Figura 18.34.

## SOLUÇÃO

Aplicando o teorema de Green e transformando a integral dupla para coordenadas polares, a integral curvilínea é igual a

$$\iint_R (6x - 0)\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_a^b (6r\cos\theta) r\,dr\,d\theta$$
$$= 6\int_0^{\pi/2} \cos\theta \left[ \tfrac{1}{3} r^3 \right]_a^b d\theta = 2(b^3 - a^3)\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta$$
$$= 2(b^3 - a^3)\left[ \operatorname{sen}\theta \right]_0^{\pi/2} = 2(b^3 - a^3)$$

Obteremos uma apreciação mais profunda do Teorema de Green tentando calcular diretamente a integral curvilínea deste exemplo.

---

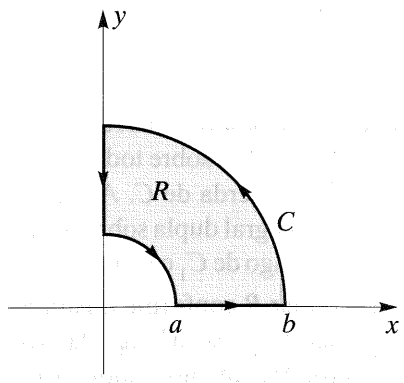



Figura 18.34

Com auxílio do teorema de Green podemos também estabelecer uma fórmula para achar a área $A$ de uma região $R$ delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave $C$. Fazendo $M = 0$ e $N = x$ em (18.19), obtemos

$$A = \iint_R dA = \oint_C x\,dy$$

Entretanto, se fizermos $M = -y$ e $N = 0$, o resultado é

$$A = \iint_R dA = -\oint_C y\,dx$$

Podemos combinar estas duas fórmulas de A somando ambos os membros das equações e dividindo o resultado por 2. Isto nos dá a terceira fórmula do próximo teorema.

**Teorema (18.20)**

Se uma região $R$ do plano-$xy$ é delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave $C$, então a área $A$ de $R$ é

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Embora as duas primeiras fórmulas em (18.20) pareçam mais fáceis de aplicar, para certas curvas a terceira fórmula conduz a uma integração mais simples. Para certificar-se disto, basta você tentar achar a área no Exercício 20 desta seção utilizando $\oint_C x\,dy$ ou $-\oint_C y\,dx$.

## EXEMPLO 4

Use o Teorema (18.20) para achar a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

## SOLUÇÃO

As equações paramétricas da elipse $C$ são $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$; $0 \le t \le 2\pi$. Aplicando a terceira fórmula do Teorema (18.20), obtemos

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,(\cos^2 t + \text{sen}^2\,t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\,ab\int_0^{2\pi} dt = \tfrac{1}{2}\,ab(2\pi) = \pi ab \end{aligned}$$

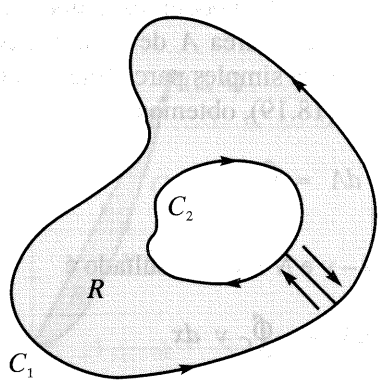



**Figura 18.35**

O teorema de Green pode ser estendido a uma região $R$ que contenha "buracos", desde que integremos sobre toda a fronteira, mantendo sempre a região $R$ à esquerda de $C$. A região da Figura 18.35 ilustra este fato; ali, a integral dupla sobre $R$ é igual à soma das integrais curvilíneas ao longo de $C_1$ e $C_2$ nas direções indicadas. A prova consiste em cortar $R$ conforme ilustrado na figura, notando que a soma de duas integrais ao longo da mesma curva e em direções opostas é zero. Argumento análogo vale no caso de a região conter mais de um "buraco". Esta observação será utilizada na resolução do próximo exemplo.

## EXEMPLO 5

Sejam $C_1$ e $C_2$ duas curvas fechadas simples parcialmente suaves que não se interceptam, cada uma tendo a origem $O$ como um ponto interior. Se

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

prove que

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy$$

## SOLUÇÃO

Denotando por $R$ a região entre $C_1$ e $C_2$, temos uma situação análoga à ilustrada na Figura 18.25, com $O$ interior a $C_2$. De acordo com as observações que precedem este exemplo, o teorema de Green nos dá

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy + \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

onde, com o símbolo $O$, indicamos a direção positiva ao longo de $C_2$ em relação a $R$. Como

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(1) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

a integral dupla sobre $R$ é zero. Conseqüentemente,

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = -\oint_{C_2} M\,dx + N\,dy$$

Como a direção positiva ao longo de $C_2$ *em relação à região no interior de* $C_2$ é oposta à indicada na integral precedente, obtemos

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy$$

como queríamos provar.

---

## EXEMPLO 6

Se $\mathbf{F}$ é definida por $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, prove que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para toda curva $C$ fechada simples parcialmente suave que tenha a origem em seu interior.

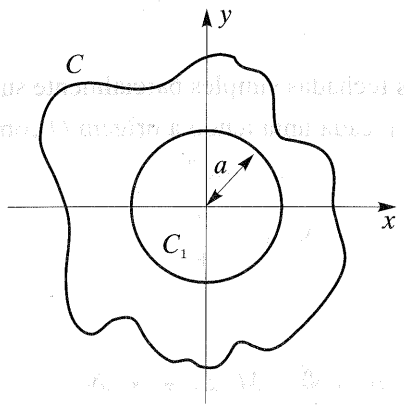



**Figura 18.36**

## SOLUÇÃO

Fazendo $\mathbf{F}(x, y) = M\,\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ então $M$ e $N$ são as mesmas que no Exemplo 5. Logo, escolhendo um círculo $C_1$ de raio $a$ e centro na origem e inteiramente contido em $C$ (ver Figura 18.36), então, pelo Exemplo 5,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como as equações paramétricas de $C_1$ são

$$x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t;\ a \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le 2\pi$$

obtemos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-a \operatorname{sen} t}{a^2}(-a \operatorname{sen} t)\,dt + \frac{a \cos t}{a^2}(a \cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

---

Podemos expressar sob forma vetorial a conclusão do teorema de Green (18.19). Primeiro, notemos que se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial em duas dimensões, então podemos escrever

$$\mathbf{F}(x, y) = M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

onde $M = M(x, y)$ e $N = N(x, y)$. O rotacional de $\mathbf{F}$ é

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

O coeficiente de k tem a mesma forma do integrando da integral dupla no Teorema de Green (18.19). Seja $s$ o parâmetro comprimento de arco para $C$, e consideremos o vetor tangente unitário

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

Com esta notação, podemos escrever o teorema de Green como a seguir:

**Forma vetorial do teorema de Green (18.21)**

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Como $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ é o componente de rot $\mathbf{F}$ na direção paralela ao eixo-$z$, chamamo-la *componente normal* (a $R$) de rot $\mathbf{F}$. Podemos enunciar (18.21) como segue: *A integral curvilínea do componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *tomado ao longo de* $C$ *uma vez na direção positiva é igual à integral dupla sobre* $R$ *do componente normal de rot* $\mathbf{F}$. O análogo tridimensional deste resultado é o teorema de Stokes, que será estudado na Seção 18.7. Discutiremos ali também interpretações físicas de rot $\mathbf{F}$.

O teorema de Green tem grande importância na área da matemática conhecida como *teoria das variáveis complexas* – fundamental para muitas aplicações às ciências físicas e à engenharia.

## EXERCÍCIOS 18.4

**Exercs. 1-14:** Aplique o teorema de Green ao cálculo da integral curvilínea.

**1** $\oint_C (x^2 + y^2)\, dx + (xy^2)\, dy$;

$C$ é a curva fechada definida por $y = x^2$ e $y = -x$, $0 \le x \le 1$.

**2** $\oint_C (x + y^2)\, dx + (1 + x^2)\, dy$;

$C$ é a curva fechada definida por $y = x^3$ e $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

**3** $\oint_C x^2y^2\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$;

$C$ é o quadrado de vértices (0, 0), (1, 0),(1, 1) e (0, 1).

**4** $\oint_C \sqrt{y}\, dx + \sqrt{x}\, dy$;

$C$ é o triângulo de vértices (1, 1), (3, 1) e (2, 2).

**5** $\oint_C xy\, dx + (y + x)\, dy$;

$C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

**6** $\oint_C y^2\, dx + x^2\, dy$;

$C$ é a fronteira da região delimitada pelo semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ e o eixo-$x$.

**7** $\oint_C xy\, dx + \operatorname{sen} y\, dy$;

$C$ é o triângulo de vértices (1, 1), (2, 2) e (3, 0).

**8** $\oint_C \operatorname{arctg} x\, dx + 3x\, dy$;

$C$ é o retângulo de vértices (1, 0), (2, 3), (0, 1), (3, 2).

**9** $\oint_C y^2(1 + x^2)^{-1}\, dx + 2y \operatorname{arctg} x\, dy$;

$C$ é a hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

**10** $\oint_C (x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy$;

$C$ é a fronteira da região delimitada pelos gráficos de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 4$.

**11** $\oint_C (x^4 + 4)\, dx + xy\, dy$;

$C$ é a cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

**12** $\oint_C xy\, dx + (x^2 + y^2)\, dy$;

$C$ é o laço, no primeiro quadrante, de $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

**13** $\oint_C (x + y)\, dx + (y + x^2)\, dy$;

$C$ é a fronteira da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

**14** $\oint_C (1 - x^2y)\, dx + \operatorname{sen} y\, dy$;

$C$ é a fronteira da região interior ao quadrado de vértices $(\pm 2, \pm 2)$ e exterior ao quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

**Exercs. 15-18:** Aplique o Teorema (18.20) para achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações.

**15** $y = 4x^2$, $y = 16x$ **16** $y = x^3$, $y^2 = x$

**17** $y^2 - x^2 = 5$, $y = 3$ **18** $xy = 2$, $x + y = 3$

**Exercs. 19-20:** Aplique o Teorema (18.20) para achar a área da região delimitada pela curva $C$.

**19** $C$ é a hipociclóide $x = a\cos^3 t, y = a\,\text{sen}^3 t; 0 \le t \le 2\pi$.

**20** $C$ é a curva parcialmente suave que consiste no folium de Descartes

$$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}; \quad 0 \le t \le 1$$

e do segmento de reta de $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $(0, 0)$.

**21** Se $\mathbf{F}(x, y)$ é um campo vetorial bidimensional e $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em uma região $D$, prove, por meio do teorema de Green, que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples parcialmente suave em $D$.

**22** Se $f$ e $g$ são funções diferenciáveis de uma variável, prove que $\oint_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$ para toda curva fechada simples parcialmente suave $C$.

**23** Sejam $M = y/(x^2 + y^2)$ e $N = -x/(x^2 + y^2)$. Se $R$ é a região delimitada pelo círculo unitário $C$ de centro da origem, mostre que

$$\oint_C M\,dx + N\,dy \neq \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Explique por que o teorema de Green não é válido nesta instância.

**24** Seja $\mathbf{F}(x, y)$ dotada de derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa $R$. Se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em $R$, prove que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples parcialmente suave $C$ em $R$.

**25** Seja $R$ a região delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave $C$ no plano-$xy$. Se a área de $R$ é $A$, use o teorema de Green para provar que o centróide $(\bar{x}, \bar{y})$ é

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

**26** Suponha que uma lâmina homogênea de densidade $k$ tenha a forma de uma região do plano-$xy$ delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave $C$. Prove que os momentos de inércia em relação aos eixos $x$ e $y$ são

$$I_x = -\frac{k}{3}\oint_C y^3\,dx, \quad I_y = -\frac{k}{3}\oint_C x^3\,dy$$

**27** Use o Exercício 25 para achar o centróide de uma região semicircular de raio $a$.

**28** Use o Exercício 26 para achar o momento de inércia de um disco circular homogêneo de raio $a$, em relação a um diâmetro.

## 18.5 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

As integrais curvilíneas são calculadas ao longo de curvas. As integrais duplas e triplas são definidas em regiões de duas e três dimensões, respectivamente. Podemos também considerar uma integral de uma função sobre uma superfície. Por uma questão de simplicidade, restringimos nosso estudo a superfícies de equações assaz simples, e nossas demonstrações ficarão em um nível intuitivo. Em textos de cálculo avançado pode-se encontrar um tratamento rigoroso.

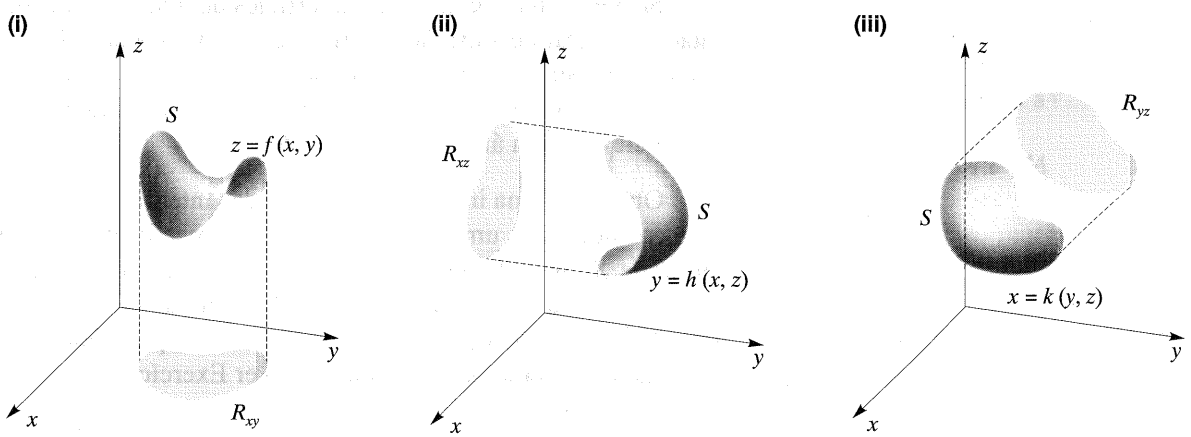



**Figura 18.37**

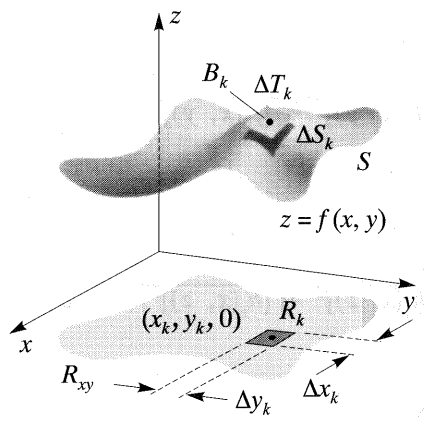



**Figura 18.38**

Se a projeção de uma superfície $S$ sobre um plano coordenado é uma região de um dos tipos considerados para integrais duplas, dizemos que $S$ tem uma **projeção regular** no plano coordenado. Se $S$ tem uma projeção regular no plano-$xy$, no plano-$xz$ ou no plano-$yz$, costumamos denotar a região por $R_{xy}$, $R_{xz}$ ou $R_{yz}$, respectivamente. Para tais projeções admitimos que $S$ seja o gráfico de uma equação da forma $z = f(x, y)$, $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$, respectivamente, conforme Figura 18.37. Admitimos, além disso, que a função $f$, $g$ ou $k$ tenha derivadas parciais primeiras contínuas em sua respectiva região.

Consideremos primeiro o caso do gráfico $S$ de $z = f(x, y)$ (ver Figura 18.37(i)). Em (17.16) definimos a área $A$ de $S$. Técnica análoga pode ser usada para definir uma integral de $g(x, y, z)$ sobre a superfície $S$, se a função $g$ é contínua em toda uma região contendo $S$. Utilizaremos a notação da Seção 17.2. Assim, conforme ilustrado na Figura 18.38, $\Delta S_k$ e $\Delta T_k$ denotarão áreas de porções da superfície $S$ e do plano tangente em $B_k(x_k, y_k, z_k)$, respectivamente, que se projetam sobre o retângulo $R_k$ de uma partição interior de $R_{xy}$. Calculamos $g$ em $B_k$ para cada $k$ e formamos a soma $\sum_k g(x_k, y_k, z_k)\,\Delta T_k$. Conforme a definição seguinte, a **integral de superfície** $\iint_S g(x, y, z)\,dS$ **de $g$ sobre $S$** é o limite de tais somas quando as normas das partições tendem para 0.

**Integral de superfície (18.22)**

$$\iint_S g(x, y, z)\,dS = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k g(x_k, y_k, z_k)\,\Delta T_k$$

Se $S$ é a união de diversas superfícies de tipos adequados, então a integral de superfície define-se como a soma das integrais de superfície individuais. Se $g(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z)$, então (18.22) se reduz a (17.17) e, daí, a integral de superfície nos dá a área da superfície $S$.

Obtém-se uma interpretação física das integrais de superfície considerando uma lâmina delgada de metal que tenha a forma de $S$. Se a densidade de massa por área em $(x, y, z)$ é $g(x, y, z)$, então (18.22) é a massa da lâmina. O centro de gravidade e os momentos de inércia são obtidos pelos métodos utilizados para sólidos no Capítulo 17 (ver Exercício 21).

Da mesma maneira que estabelecemos a fórmula (17.17) para a área de uma superfície, a integral de superfície (18.22) pode ser calculada por meio da fórmula (i) do próximo teorema. As fórmulas (ii) e (iii) são utilizadas para superfícies do tipo ilustrado na Figura 18.37(ii) e (iii).

**Teorema de cálculo para integrais de superfície (18.23)**

**(i)** $$\iint_S g(x, y, z)\, dS =$$

$$\iint_{R_{xy}} g(x, y, f(x, y))\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

**(ii)** $$\iint_S g(x, y, z)\, dS =$$

$$\iint_{R_{xz}} g(x, h(x, z), z) = \sqrt{[h_x(x, z)]^2 + [h_z(x, z)]^2 + 1}\, dA$$

**(iii)** $$\iint_S g(x, y, z)\, dS =$$

$$\iint_{R_{yz}} g(k(y, z), y, z)\sqrt{[k_y(y, z)]^2 + [k_z(y, z)]^2 + 1}\, dA$$

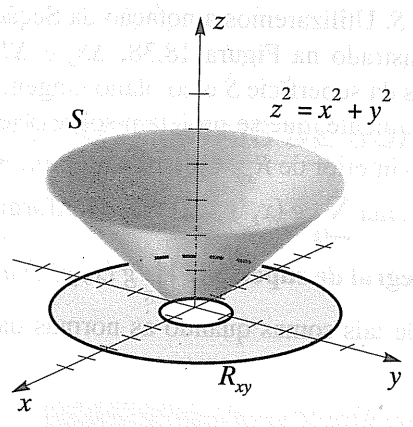



**Figura 18.39**

## EXEMPLO 1

Calcule $\iint_S x^2 z\, dS$ se $S$ é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.

## SOLUÇÃO

Conforme a Figura 18.39, a projeção $R_{xy}$ de $S$ sobre o plano-$xy$ é a região anular delimitada pelos círculos de raios 1 e 4 com centros na origem. Escrevendo a equação de S na forma

$$z = (x^2 + y^2)^{1/2} = f(x, y)$$

então $f_x(x, y) = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$ e $f_y(x, y) = \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$

Aplicando (18.23)(i) e notando que o radical se reduz a $\sqrt{2}$, obtemos

$$\iint_S x^2 z \, dS = \iint_{R_{xy}} x^2(x^2 + y^2)^{1/2}\sqrt{2} \, dA$$

Utilizamos coordenadas polares para calcular a integral dupla como a seguir:

$$\iint_{R_{xy}} x^2(x^2 + y^2)^{1/2}\sqrt{2} \, dA = \int_0^{2\pi}\int_1^4 (r^2 \cos^2\theta) r\sqrt{2} r \, dr \, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^4 d\theta$$

$$= \frac{1.023\sqrt{2}}{5}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1.023\sqrt{2}}{10}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1.023\sqrt{2}\pi}{5} \approx 909$$

## EXEMPLO 2

Calcule $\iint_S (xz/y) \, dS$ se $S$ é a parte do cilindro $x = y^2$ situada no primeiro octante entre os planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ e $y = 4$.

## SOLUÇÃO

A Figura 18.40 ilustra a superfície $S$. A projeção $R_{yz}$ de $S$ sobre o plano-$yz$ é o retângulo de vértices (0, 1, 0), (0, 4, 0), (0, 4, 5) e (0, 1, 5). Assim, pelo Teorema (18.23)(iii) com $k(y, z) = y^2$,

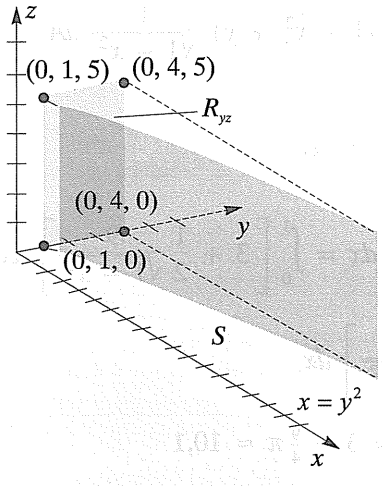



Figura 18.40

$$\iint_S \frac{xz}{y} \, dS = \int_1^4\int_0^5 \frac{y^2 z}{y}\sqrt{(2y)^2 + 0^2 + 1} \, dz \, dy$$

$$= \int_1^4\int_0^5 y\sqrt{4y^2 + 1}\, z \, dz \, dy = \int_1^4 y\sqrt{4y^2 + 1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^5 dy$$

$$= \frac{25}{2}\int_1^4 y\sqrt{4y^2 + 1} \, dy = \frac{25}{24}\left[(4y^2 + 1)^{3/2}\right]_1^4$$

$$= \frac{25}{24}(65^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 534{,}2$$

As fórmulas no Teorema (18.23) pressupõem que as funções $f$, $h$ e $k$ tenham derivadas parciais primeiras contínuas em $R_{xy}$ $R_{xz}$, e $R_{yz}$, respectivamente. Em certos casos, estas restrições podem ser removidas, utilizando-se uma integral imprópria, como no seguinte exemplo.

**EXEMPLO 3**

Calcule $\iint_S (z+y)\,dS$ se $S$ é a parte do gráfico de $z = \sqrt{1 - x^2}$ no primeiro octante entre o plano-$xz$ e o plano $y = 3$.

**SOLUÇÃO**

A superfície $S$ é a parte, no primeiro octante, do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ de $y = 0$ a $y = 3$. O gráfico está esboçado na Figura 18.41. A projeção $R_{xy}$ de $S$ sobre o plano-$xy$ é a região retangular de vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 3, 0) e (0, 3, 0). Se quisermos utilizar o Teorema (18.23)(i) com $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$, então

$$\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + (0)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Note que $f_x(x, y)$ não é definida em $x = 1$ e, assim, não é contínua em toda a $R_{xy}$. Todavia, podemos aplicar o Teorema (18.23)(i) com $0 \le x < 1$ e utilizar então uma integral imprópria, como a seguir:

$$\iint_S (z + y)\,dS = \iint_{R_{xy}} (\sqrt{1 - x^2} + y)\,\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^3 \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[ y + \frac{1}{2}\frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right]_0^3 dx = \int_0^1 \left[ 3 + \frac{1}{2}\frac{9}{\sqrt{1 - x^2}} \right] dx$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \left[ 3 + \frac{9}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right] dx$$

$$= \lim_{t \to 1^-} (3t + \tfrac{9}{2} \operatorname{arcsen} t) = 3 + \tfrac{9}{4}\pi \approx 10{,}1$$

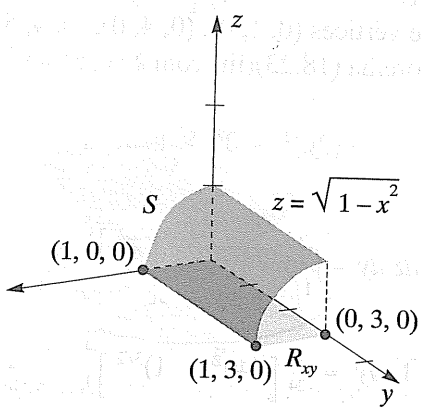



**Figura 18.41**

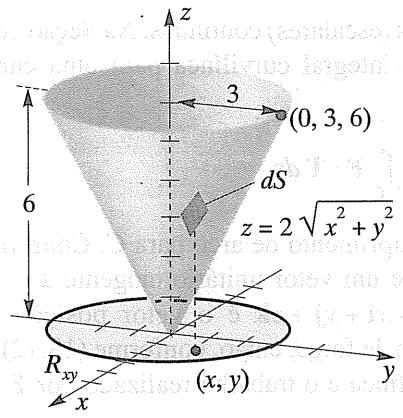



**Figura 18.42**

Na Seção 6.8 vimos como achar a força exercida sobre uma face de uma lâmina quando ela está submersa em um fluido (ver (6.27)). Podemos utilizar integrais de superfície para resolver problemas análogos para superfícies não-laminares, conforme ilustrado no próximo exemplo.

## EXEMPLO 4

Um depósito tem a forma de um cone circular reto de 6 dm de altura e 3 dm de raio de base. Se o depósito está cheio de água que pesa 1 kg/dm$^3$, ache a força total exercida pela água sobre a superfície interna do depósito.

## SOLUÇÃO

Referindo o depósito a um sistema coordenado $xyz$ conforme Figura 18.42 (onde as unidades são em decímetros), a equação do cone tem a forma $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, k constante. Como o ponto (0, 3, 6) está no cone, $6 = k\sqrt{0^2 + 3^2}$, ou $k = 2$. Logo, $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Seja $dS$ um elemento de área da superfície do cone que está (aproximadamente) à distância $z$ do plano-$xy$. A profundidade correspondente da água no depósito é $6 - z$ e a pressão à profundidade de $6 - z$ dm é de

$$(6 - z)\, dS \text{ kg}$$

Tomando um limite de somas, vemos que a força total exercida pela água sobre a superfície interna S do cone é

$$F = \iint_S (6 - z)\, dS$$

A região $R_{xy}$ sob o cone é delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$. Aplicando (18.23)(i) com $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2} = z$, verifica-se que

$$F = \iint_{R_{xy}} (6 - z)\sqrt{5}\, dA$$

Passando para coordenadas polares

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (6 - 2r)\sqrt{5}\, r\, dr\, d\theta \approx 40{,}25\pi \text{ kg}$$

---

É quando lidamos com campos vetoriais que ocorrem as aplicações mais importantes das integrais de superfície. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

onde $M$, $N$ e $P$ são funções (escalares) contínuas. Na Seção 18.2 consideramos a seguinte integral curvilínea para uma curva parcialmente suave $C$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

onde $s$ é o parâmetro comprimento de arco para $C$. Conforme Figura 18.43, $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ é um vetor unitário tangente a $C$ no ponto $(x, y, z)$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição de $(x, y, z)$. Se $\mathbf{F}$ é um campo de força, então, conforme (18.12), o valor desta integral curvilínea é o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de $C$.

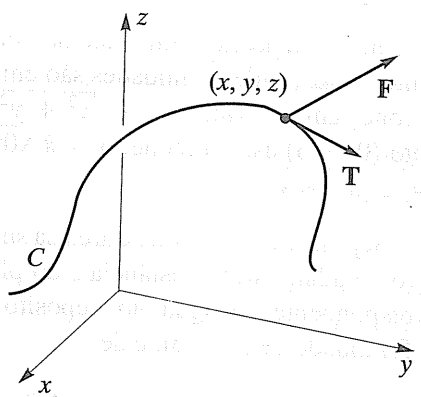



**Figura 18.43**

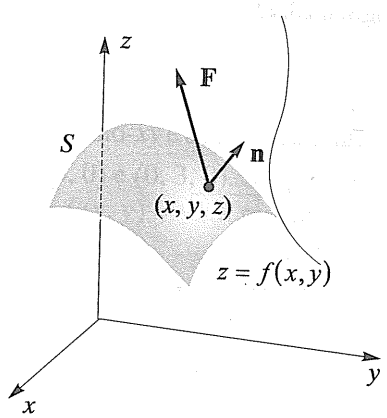



**Figura 18.44**

Consideremos em seguida uma superfície $S$ e um vetor unitário $\mathbf{n}$ normal a $S$ no ponto $(x, y, z)$, conforme Figura 18.44. Se os componentes de $\mathbf{n}$ são funções contínuas de $x$, $y$ e $z$, então $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é uma função (escalar) contínua e podemos, assim, considerar a seguinte integral de superfície sobre $S$, a qual, por razões que apresentaremos no final desta seção, é chamada **integral do fluxo de F** sobre $S$.

**Integral do fluxo de F sobre S (18.24)**

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

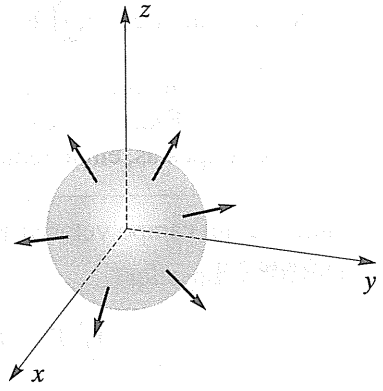
Para calcular (18.24), devemos ser mais precisos sobre as propriedades do vetor unitário $\mathbf{n}$. Se a superfície $S$ é o gráfico de uma equação $z = f(x, y)$ e se fazemos $g(x, y, z) = z - f(x, y)$, então $S$ é também o gráfico da equação $g(x, y, z) = 0$. Como o gradiente $\nabla g(x, y, z)$ é um vetor normal ao gráfico de $g(x, y, z) = 0$ no ponto $(x, y, z)$, podemos obter como a seguir um vetor unitário normal $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Fórmulas análogas valem se $S$ é dada por $y = h(x, z)$ ou por $x = k(y, z)$. Note que, para o caso $z = f(x, y)$, o vetor unitário $\mathbf{n}$ é uma **normal superior** de $S$, pois o componente $\mathbf{k}$ é positivo. Obtém-se uma **normal inferior** tomando-se $-\mathbf{n}$.

No restante deste capítulo, admitiremos que toda superfície $S$ é **orientada** (ou **orientável**), no sentido de que existe um vetor unitário normal $\mathbf{n}$ em cada ponto não-fronteira $(x, y, z)$ e que as componentes de $\mathbf{n}$ são funções contínuas de $x$, $y$ e $z$. Dizemos que $\mathbf{n}$ *varia continuamente* sobre a superfície $S$. Admitiremos também que $S$ tenha dois lados – o *lado de cima* e o *lado de baixo* do gráfico de $z = f(x, y)$ da Figura 18.44. Para uma superfície fechada $S$ como uma esfera, podemos considerar o *exterior* e o *interior* de $S$. Referimo-nos então a $\mathbf{n}$ como a **normal unitária exterior** ou a **normal unitária interior** (ver Figura 18.45).

**(i)** Normais unitárias exteriores




**(ii)** Normais unitárias interiores

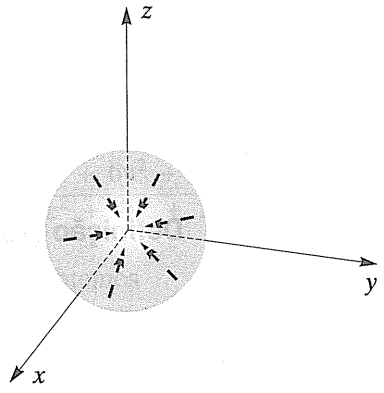



**Figura 18.45**

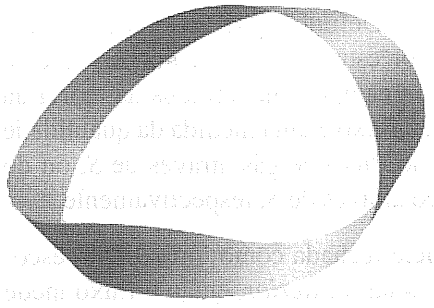


**Figura 18.46** Faixa de Möbius.

Nossas restrições sobre $S$ excluem as *superfícies unilaterais*, como a faixa de Möbius, assim designada em homenagem ao matemático alemão A. F. Möbius (1790-1868). Pode-se construir uma faixa de Möbius a partir de uma longa faixa retangular de papel, dando-se meia volta ao papel e colando-se as extremidades menores, o que dá a superfície ilustrada na Figura 18.46. Imaginemos um pintor que, partindo de um ponto qualquer da superfície, tentasse pintar apenas um lado da faixa original. O pintor acabará voltando ao ponto de partida, após

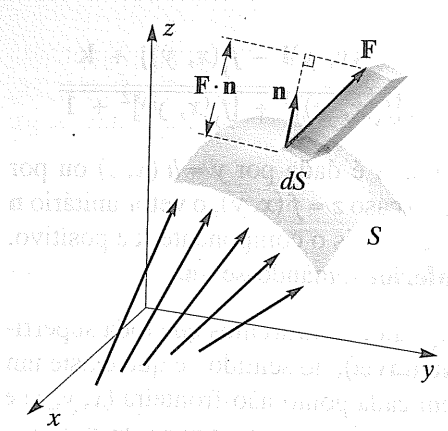



**Figura 18.47**

pintar toda a superfície, sem ter cruzado nenhuma de suas bordas. Tal superfície unilateral não é orientável.

Para interpretar a significação física da integral do fluxo (18.24), encaremos a superfície $S$ como uma membrana delgada através da qual possa passar um fluido. Suponhamos $S$ imersa em um fluido com campo de velocidade $\mathbb{F}(x, y, z)$. A parte inferior da Figura 18.47, exibe alguns vetores típicos do campo. Cada vetor do campo é a velocidade de uma partícula do fluido (ou molécula).

Suponhamos que $dS$ represente um pequeno elemento de área de $S$. Se $\mathbb{F}$ é contínua, então é quase constante em $dS$, e a quantidade de fluido que atravessa $dS$ por unidade de tempo pode ser aproximada pelo volume de um prisma de área de base $dS$ e altura $\mathbb{F} \cdot \mathbf{n}$, conforme ilustrado na Figura 18.47. Denotando por $dV$ o volume do prisma na figura, então $dV = \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$. Como $dV$ representa a quantidade de fluido que atravessa $dS$ por unidade de tempo, a integral do fluxo é um limite de somas de elementos de volume e, daí, $\iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ *é o volume total de fluido que atravessa S em uma unidade de tempo.* Esta quantidade é chamada *fluxo de* $\mathbb{F}$ *através de* (ou *sobre*) $S$. Se $\mathbb{F}$ e $S$ satisfazem as condições impostas, então temos o seguinte:

**Definição (18.25)**

O fluxo de um campo vetorial $\mathbb{F}$ através de (ou sobre) uma superfície $S$ é

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

*Se o fluido de nosso estudo prévio tem densidade* $\delta = \delta(x, y, z)$, então o valor da integral do fluxo $\iint_S \delta\mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ *é a massa de fluido que atravessa S.*

O campo vetorial $\mathbb{F}$ da Definição (18.25) pode também representar o fluxo de valor estacionário, ou um gás que se expande uniformemente, ou campos encontrados na teoria da eletricidade. Nesses casos, o fluxo é uma medida da quantidade de calor que atravessa $S$, do fluxo de gás através de $S$, ou do fluxo elétrico ou magnético através de $S$, respectivamente.

Se, para uma superfície fechada como uma esfera, escolhemos $\mathbf{n}$ como a *normal* unitária *exterior*, então o fluxo mede o *fluxo líquido para fora* por unidade de tempo. Se a integral do fluxo é positiva, então o fluxo que sai de $S$ excede o fluxo que entra em $S$; dizemos que há uma **fonte** de $\mathbb{F}$ dentro de $S$. Se a

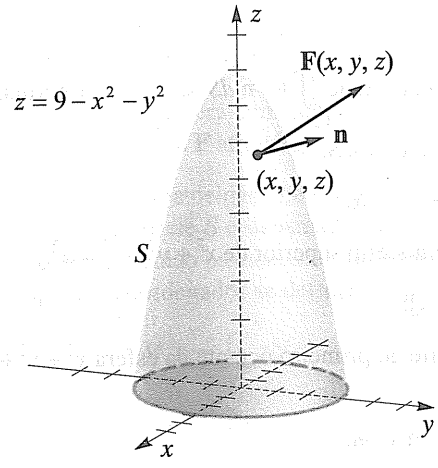



**Figura 18.48**

integral é negativa, o fluxo que entra excede o fluxo que sai, havendo então um **poço** dentro de $S$. Se a integral é 0, o fluxo que sai e o fluxo que entra são iguais, ou seja, as fontes e os poços se equilibram.

## EXEMPLO 5

Seja $S$ a parte do gráfico de $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, ache o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S$.

## SOLUÇÃO

A Figura 18.48 ilustra o gráfico, juntamente com uma normal unitária superior típica $\mathbf{n}$ e o vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$. De acordo com o que vimos após (18.24), para achar uma fórmula para $\mathbf{n}$ consideramos

$$g(x, y, z) = z - (9 - x^2 - y^2) = z - 9 + x^2 + y^2$$

e fazemos

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x,\ y,\ z)}{\|\nabla g(x,\ y,\ z)\|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Por (18.25), o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S$ é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS$$

Aplicando o Teorema (18.23)(i), obtemos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R_{xy}} \frac{6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_{R_{xy}} (5x^2 + 5y^2 + 9)\, dA$$

onde $R_{xy}$ é a região circular do plano-$xy$ delimitada pelo gráfico de $x^2 + y^2 = 9$. Passando para coordenadas polares, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (5r^2 + 9) r\, dr\, d\theta = \frac{567\pi}{2} \approx 890{,}6$$

Se, por exemplo, $\mathbf{F}$ é o campo de velocidade de um gás em expansão e $\|\mathbf{F}\|$ é medido em m/seg, então a unidade de fluxo é $m^3$/seg. Logo, o fluxo de gás através da superfície $S$ na Figura 18.48 é aproximadamente 890,6 $m^3$/seg.

---

Na próxima seção estudaremos um resultado, chamado *teorema da divergência*, que possibilitará calcularmos o fluxo através de uma superfície fechada por meio de uma integral tripla.

## EXERCÍCIOS 18.5

**Exercs. 1-4:** Calcule $\iint_S g(x, y, z)\, dS$.

1 $g(x, y, z) = x^2$; $S$ é o hemisfério superior de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2 $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $S$ é a parte do plano $z = y + 4$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

3 $g(x, y, z) = x + y$; $S$ é a parte do primeiro octante do plano $2x + 3y + z = 6$.

4 $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$; $S$ é a porção do paraboloide $2z = x^2 + y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

**Exercs. 5-8:** Expresse a integral de superfície como uma integral dupla iterada utilizando uma projeção de $S$ sobre o plano-$yz$ e (b) o plano-$xz$.

5 $\iint_S xy^2z^3\, dS$;

$S$ é a parte no primeiro octante do plano $2x + 3y + 4z = 12$.

6 $\iint_S (xz + 2y)\, dS$;

$S$ é a parte do gráfico de $y = x^3$ entre os planos $y = 0$, $y = 8$, $z = 2$ e $z = 0$.

7 $\iint_S (x^2 - 2y + z)\, dS$;

$S$ é a parte do gráfico de $4x + y = 8$ delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $z = 6$.

8 $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$;

$S$ é a parte no primeiro octante do gráfico de $x^2 + y^2 = 4$ delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $x + z = 2$.

9 Interprete $\iint_S g(x, y, z)\, dS$ geometricamente se f é a função constante $g(x, y, z) = c$, com $c > 0$ e $S$ sendo uma projeção regular no plano-$xy$.

10 Mostre que uma integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ é um caso especial de uma integral de superfície.

**Exercs. 11-14:** Ache $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ se $\mathbf{n}$ é uma normal unitária superior de S.

11 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

$S$ é o hemisfério superior de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

12 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$;

$S$ é a parte no primeiro octante da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

13 $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

$S$ é a parte do cone $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

14 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

$S$ é a parte do plano $3x + 2y + z = 12$ interceptada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ e $y = 2$.

**Exercs. 15-16:** Ache o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S$.

15 $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

$S$ é a parte no primeiro octante do plano $2x + 3y + z = 6$.

16 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + z)\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z)\mathbf{k}$;

$S$ é a parte no primeiro octante do paraboloide $z = x^2 + y^2$ interceptada pelo plano $z = 4$.

**Exercs. 17-18:** Ache o fluxo de $\mathbf{F}$ sobre a superfície fechada $S$. (Use a normal *exterior* a $S$.)

17 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície do cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

18 $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície do sólido delimitado pelos gráficos de $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$.

19 Se $S$ é dada por $x = k(y, z)$ e $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, mostre que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R_{yz}} [M - Nk_y(y, z) - Pk_z(y, z)]\, dy\, dz.$$

20 Pela lei de Coulomb, se uma carga pontual está situada na origem, então a força exercida sobre

uma carga unitária em $(x, y, z)$ é dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (cq/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$, com $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Se $S$ é uma esfera com centro na origem, mostre que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S$ é $4\pi cq$.

**21** Se uma chapa delgada de metal $T$ tem a forma de uma superfície $S$ e densidade de massa por área $\delta(x, y, z)$, então os *momentos* de $T$ em relação aos planos coordenados se definem como

$$M_{xy} = \iint_S z\delta(x, y, z)\, dS$$

$$M_{xz} = \iint_S y\delta(x, y, z)\, dS$$

$$M_{yz} = \iint_S x\delta(x, y, z)\, dS$$

Utilizando limites de somas, mostre que essas são definições naturais. O *centro de massa* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é definido como

$$\bar{x}m = M_{yz}, \quad \bar{y}m = M_{xz}, \quad \bar{z}m = M_{xy}$$

onde $m$ é a massa de $T$. Suponha que um funil de metal tenha a forma da superfície $S$ do Exemplo 1 (ver Figura 18.39). Se a unidade de comprimento é o centímetro e a densidade de massa por área no ponto $(x, y, z)$ é $z^2$ gm/cm$^2$, ache

(a) a massa e o centro de massa do funil

(b) o momento de inércia do funil em relação ao eixo-$z$.

**22** Ref. Exercício 21. Uma lâmina delgada de metal de densidade constante $k$ tem a forma do hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Ache seu centro de massa.

## 18.6 O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Um dos mais importantes teoremas do cálculo vetorial é o *teorema da divergência*, também chamado *teorema de Gauss*, em homenagem a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que muitos consideram o maior matemático de todos os tempos. Este teorema estabelece o fluxo de um campo vetorial sobre uma **superfície fechada** $S$ que é fronteira de uma região $Q$ em três dimensões. Por exemplo, $S$ pode ser uma esfera, um elipsóide, um cubo ou um tetraedro. Pode-se demonstrar o teorema da divergência para regiões assaz complicadas; todavia, tal demonstração nos levaria aos domínios do cálculo avançado. Assim, *em toda esta seção*, admitiremos que $Q$ seja uma região sobre a qual as integrais triplas podem ser calculadas; pelos métodos estabelecidos no Capítulo 17. Admitiremos também que as integrais de superfície possam ser calculadas sobre $S$. Nesta seção, $\mathbf{n}$ denotará uma normal unitária *exterior* a $S$, conforme ilustrado por alguns vetores típicos na Figura 18.49.

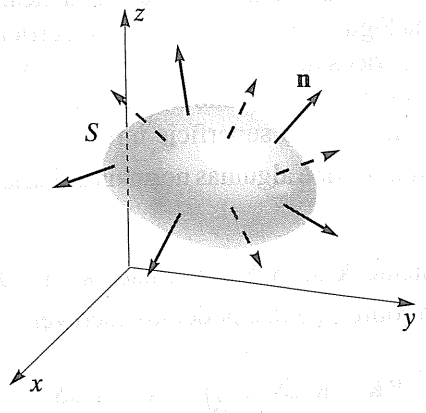



**Figura 18.49**

Sob as restrições já feitas a $Q$ e a $S$, o teorema da divergência pode ser enunciado como a seguir:

**Teorema da divergência (18.26)**

Seja $Q$ uma região em três dimensões delimitada por uma superfície fechada $S$, e denotemos por $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior a $S$ em $(x, y, z)$. Se $\mathbf{F}$ é uma função vetorial dotada de derivadas parciais contínuas em $Q$, então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

isto é, *o fluxo de* $\mathbf{F}$ *sobre* $S$ *é igual à integral tripla da divergência de* $\mathbf{F}$ *sobre* $Q$.

## DEMONSTRAÇÃO

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, simplifiquemos a notação escrevendo $\mathbf{F} = M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + P\,\mathbf{k}$. Aplicando propriedades do produto escalar e a definição de $\mathbf{F}$, podemos escrever a conclusão do teorema como

$$\iint_S (M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} + N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_Q \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) dV$$

Para provar esta igualdade, basta mostrar que

$$\iint_S M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x}\, dV$$

$$\iint_S N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y}\, dV$$

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\, dV$$

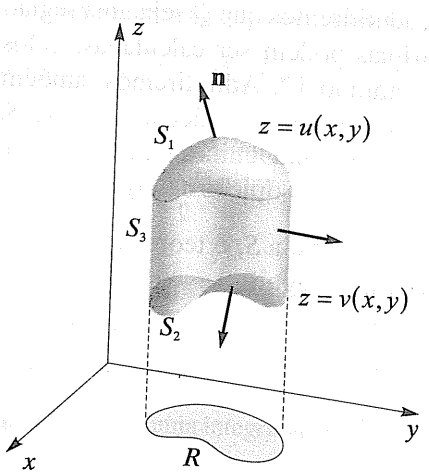



**Figura 18.50**

Como as provas de todas as três fórmulas são semelhantes, consideraremos apenas a terceira. Além disso, a prova ficará restrita ao caso, ilustrado na Figura 18.50, em que $S$ é a superfície de uma região $Q$ entre os gráficos de $z = v(x, y)$ e $z = u(x, y)$ e acima de uma região conveniente $R$ do plano-$xy$. Denotaremos por $S_1$ a superfície superior, por $S_2$ a superfície inferior e por $S_3$ a superfície lateral. A figura exibe algumas normais unitárias exteriores típicas.

Sobre $S_3$, o componente $\mathbf{k}$ de $\mathbf{n}$ é 0 e, então, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$. Assim, a integral do fluxo sobre $S_3$ é 0, e podemos escrever

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Tal como na Seção 18.5, para achar uma normal unitária (superior) a $S_1$, fazemos

$$g_1(x, y, z) = z - u(x, y)$$

e calculamos

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g_1(x, y, z)}{\|\nabla g_1(x, y, z)\|} = \frac{-u_x(x, y)\mathbf{i} - u_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Logo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 1/\sqrt{[u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2 + 1}$. Aplicando o Teorema (18.23)(i) com $R = R_{xy}$ e $u(x, y) = f(x, y)$, os radicais cancelam-se, obtendo-se

$$\iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R P(x, y, u(x, y))\, dA$$

Em $S_2$, fazemos

$$g_2(x, y, z) = z - v(x, y)$$

e utilizamos a normal unitária *inferior* $\mathbf{n}$ dada por

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla g_2(x, y, z)}{\|\nabla g_2(x, y, z)\|} = \frac{v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{[v_x(x, y)]^2 + [v_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Novamente aplicando (18.23)(i) obtemos a integral do fluxo sobre $S_2$,

$$\iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_R P(x, y, v(x, y))\, dA$$

Somando as integrais do fluxo sobre $S_1$ e $S_2$, obtemos

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R [P(x, y, u(x, y)) - P(x, y, v(x, y))]\, dA$$

$$= \iint_R \left[ \int_{v(x,y)}^{u(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz \right] dA = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\, dV$$

como queríamos provar. Nossa demonstração pode estender-se a uma união finita de regiões do tipo considerado. As provas das fórmulas para $\iint_S M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS$ e $\iint_S N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS$ são análogas, desde que $Q$ e $S$ sejam convenientemente restringidas.

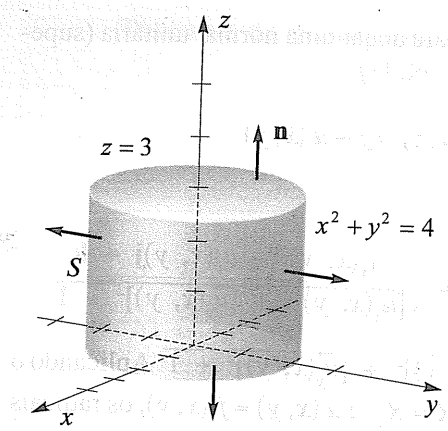



Figura 18.51

## EXEMPLO 1

Seja $Q$ a região delimitada pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 3$. Denotemos por $S$ a superfície de $Q$. Se $\mathbb{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$, use o teorema da divergência para calcular $\iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

## SOLUÇÃO

A Figura 18.51 ilustra a superfície $S$ e algumas posições típicas de $\mathbf{n}$. Como

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

temos, pelo teorema da divergência (18.26),

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 3 \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2)\, dV.$$

Calculando a integral tripla por coordenadas cilíndricas, temos

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2) r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[ r^2 z + \tfrac{1}{3} z^3 \right]_0^3 r\, dr\, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^2 + 9) r\, dr\, d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \left[ \tfrac{3}{4} r^4 + \tfrac{9}{2} r^2 \right]_0^2 d\theta = 3 \int_0^{2\pi} 30\, d\theta = 90 \left[ \theta \right]_0^{2\pi} = 180\pi$$

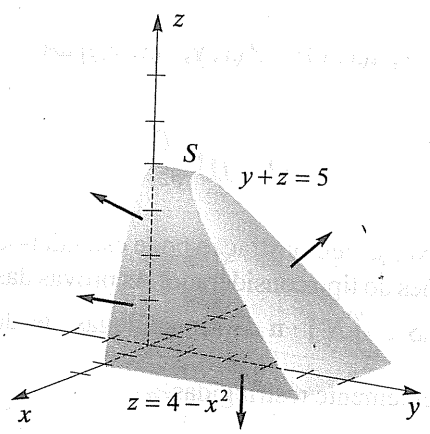



Figura 18.52

## EXEMPLO 2

Seja $Q$ a região delimitada pelo cilindro $z = 4 - x^2$, pelo plano $y + z = 5$ e pelos planos $xy$ e $xz$. Seja $S$ a superfície de $Q$. Se $\mathbb{F}(x, y, z) = (x^3 + \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x^2 y + \cos z)\mathbf{j} + e^{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$, calcule $\iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

## SOLUÇÃO

A Figura 18.52 ilustra a região $Q$, com vários vetores normais unitários exteriores. Seria extremamente difícil calcular diretamente a integral de superfície, todavia, utilizando o teorema da divergência, podemos obter o valor a partir da integral tripla

$$\iiint_Q (3x^2 + x^2)\, dV = \iiint_Q 4x^2\, dV$$

Referindo-nos à Figura 18.52 e aplicando (17.20), vemos que esta integral é igual a

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{0}^{5-z} 4x^2\,dy\,dz\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} 4x^2(5-z)\,dz\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\,20x^2z - 2x^2z^2\,\right]_0^{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (48x^2 - 4x^4 - 2x^6)\,dx$$

$$= \frac{4.608}{35} \approx 131{,}7$$

Com auxílio do teorema da divergência, podemos obter uma interpretação da divergência de um campo vetorial. Comecemos recordando o teorema do valor médio para integrais definidas, segundo o qual, se uma função $f$ de uma variável é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existe um número c em $(a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)L$$

onde $L = b - a$ é o comprimento de $[a, b]$. Demonstram-se resultados análogos para integrais duplas e triplas. Assim, se uma função $f$ de três variáveis é contínua em toda uma região esférica $Q$, então existe um ponto $A\ (x_1, y_1, z_1)$ no interior de $Q$ tal que

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = [f(x, y, z]_A\ V$$

onde $V$ é o volume de $Q$ e $[f(x, y, z)]_A = f(x_1, y_1, z_1)$. Chamemos a este resultado o **teorema do valor médio para integrais triplas**. Segue-se que, se $\mathbf{F}$ é uma função vetorial contínua, então

$$\iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = [\nabla \cdot \mathbf{F}]_A\ V$$

ou, equivalentemente,

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_A = \frac{1}{V}\iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV$$

Aplicando o teorema da divergência, temos

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_A = \frac{1}{V}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$$

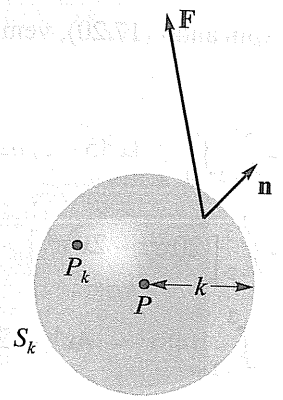



**Figura 18.53**

onde $S$ é a superfície de $Q$. A quantidade à direita pode ser encarada como *o fluxo de* $\mathbb{F}$ *por unidade de volume sobre a esfera.*

Seja, em seguida, $P$ um ponto arbitrário e suponhamos $\mathbb{F}$ contínua em toda uma região contendo $P$ em seu interior. Seja $S_k$ a superfície de uma esfera de raio $k$ com centro em $P$. Pela discussão prévia, para cada $k$ existe um ponto $P_k$ interior a $S_k$ tal que

$$[\nabla \cdot \mathbb{F}]_{P_k} = \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

onde $V_k$ é o volume da esfera (ver Figura 18.53).

Fazendo $k \to 0$, então $P_k \to P$ e $[\nabla \cdot \mathbb{F}]_{P_k} \to [\nabla \cdot \mathbb{F}]_P = [\text{div } \mathbb{F}]_P$, o que nos dá

**Divergência como um limite (18.27)**

$$[\text{div } \mathbb{F}]_P = \lim_{k \to 0} \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Assim, *a divergência de* $\mathbb{F}$ *em* $P$ *é o valor-limite do fluxo por unidade de volume sobre uma esfera de centro* $P$*, quando o raio da esfera tende para* 0. Em particular, se $\mathbb{F}$ representa a velocidade de um fluido, então $[\text{div } \mathbb{F}]_P$ pode ser interpretada como a taxa de perda ou ganho de fluido por unidade de volume em $P$, por unidade de tempo. Se $\delta = \delta(x, y, z)$ é a densidade em $(x, y, z)$, então $[\text{div } \delta\mathbb{F}]_P$ é a variação de *massa* por unidade de volume por unidade de tempo. Segue-se, das observações no final da Seção 18.5, que há uma fonte ou um poço em $P$ se $[\text{div } \mathbb{F}]_P > 0$ ou $[\text{div } \mathbb{F}]_P < 0$, respectivamente. Se o fluido é incompressível e não existe nenhuma fonte ou nenhum poço, então não pode haver nem ganho nem perda dentro do elemento de volume $V_k$ e, assim, div $\mathbb{F} = 0$ em todo ponto de $P$. A forma-limite da divergência (18.27) pode aplicar-se também a conceitos físicos tais como fluxo elétrico ou magnético, pois esses apresentam muitas características análogas às dos fluidos.

## EXEMPLO 3

Suponhamos que uma superfície fechada $S$ constitua a fronteira de uma região $Q$ e que a origem $O$ seja um ponto interior de $Q$. Se um campo quadrado inverso é dado por $\mathbb{F} = (q/r^3)\,\mathbf{r}$, onde $q$ é uma constante, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, e $r = \|\mathbf{r}\|$, prove que o fluxo de $\mathbb{F}$ sobre $S$ é $4\pi q$ independentemente da forma de $Q$.

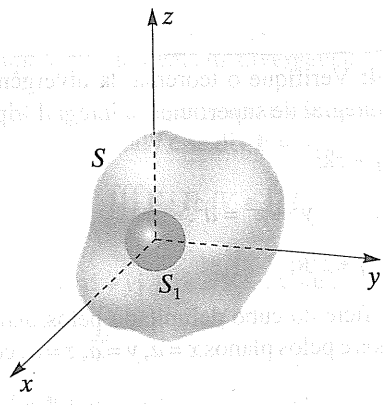



Figura 18.54

## SOLUÇÃO

Como $\mathbb{F}$ não é contínua em $O$, o teorema da divergência não pode ser aplicado diretamente; todavia, podemos proceder como a seguir. Seja $S_1$ uma esfera de raio $a$ e centro $O$ inteiramente contida em $S$ (ver Figura 18.54) e denotemos por $Q_1$ a região *exterior* a $S_1$ e *interior* a $S$. Como $\mathbb{F}$ é contínua em toda $Q_1$, podemos aplicar o teorema da divergência, obtendo

$$\iiint_{Q_1} \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_1} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Pode-se mostrar que, se $\mathbb{F}$ é um campo quadrado inverso, então $\nabla \cdot \mathbb{F} = 0$ (ver Exercício 21 da Seção 18.1) e, portanto,

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_{S_1} \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Como a normal unitária $\mathbf{n}$ em $S$ é uma normal *exterior*, ela aponta *para fora* da região $Q$ que tem $S_1$ como parte de sua fronteira. Logo, em $S_1$, o unitário $\mathbf{n}$ da normal aponta *para* a origem. Assim, $\mathbf{n} = (-1/r)\,\mathbf{r}$ com $r = a$, e

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_{S_1} \left(\frac{q}{r^3}\right)\mathbf{r} \cdot \left(-\frac{1}{r}\mathbf{r}\right) dS$$

$$= \iint_{S_1} \frac{q}{r^4}\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\, dS = \iint_{S_1} \frac{q}{r^2}\, dS$$

$$= \frac{q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{q}{a^2}\,(4\pi a^2) = 4\pi q$$

O Exemplo 3 tem aplicação importante na teoria da eletricidade. Pela lei de Coulomb, se uma carga pontual de $q$ coulombs está situada na origem, então a força exercida sobre uma carga unitária em $(x, y, z)$ é $\mathbb{F}(x, y, z) = (cq/\|\mathbf{r}\|^3)\,\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $c$ é uma constante. Segue-se que o *fluxo elétrico* de $\mathbb{F}$ sobre qualquer superfície fechada contendo a origem é $4\pi cq$. Assim, o fluxo elétrico é independente do tamanho ou da forma de $S$, e depende somente de $q$. Não é difícil estender este resultado ao caso de mais de uma carga pontual interior a $S$. Este resultado, conhecido como *lei de Gauss*, tem conseqüências de amplo alcance no estudo dos campos elétricos.

## EXERCÍCIOS 18.6

**Exercs. 1-4:** Aplique o teorema da divergência (18.26) para achar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

**1** $\mathbf{F} = y \operatorname{sen} x\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + (x + 3z)\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região delimitada pelos planos $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$.

**2** $\mathbf{F} = y^3e^z\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + x \operatorname{arctg} y\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

**3** $\mathbf{F} = (x^2 + \operatorname{sen} yz)\mathbf{i} + (y - xe^{-z})\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e os planos $x + z = 2$ e $z = 0$.

**4** $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + z \cosh x\mathbf{j} + (z^2 + y \operatorname{arc\,sen} x)\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região delimitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 1$.

**Exercs. 5-10:** Aplique o teorema da divergência (18.26) para achar o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S$.

**5** $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$;

$S$ é o gráfico de $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$.

**6** $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (4z - 2yz)\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região delimitada pelo cone $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ e pelo plano $x = 9$.

**7** $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região delimitada pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano-$xy$.

**8** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$ e entre os planos $z = -1$ e $z = 2$.

**9** $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e os planos $x + 2z = 4$ e $y = 2$.

**10** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

**Exercs. 11-14:** Verifique o teorema da divergência calculando a integral de superfície e a integral tripla.

**11** $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

$S$ é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**12** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície do cubo delimitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = a, y = a, z = a$, com $a > 0$.

**13** $\mathbf{F} = (x + z)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$;

$S$ é a superfície da região $Q = \{(x, y, z): 0 \le y^2 + z^2 \le 1, 0 \le x \le 2\}$.

**14** $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^2\mathbf{r}$ para $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

$S$ é esfera $x^2 + yy^2 + z^2 = a^2$.

**15** Se $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ para toda superfície fechada do tipo considerado no teorema da divergência, prove que div $\mathbf{F} = 0$.

**16** Use o teorema da divergência para provar que se uma função escalar $f$ tem derivadas parciais segundas contínuas, então

$$\iiint_Q \nabla^2 f\, dV = \iint_S D_{\mathbf{n}} f\, dS$$

onde $D_n f$ é a derivada direcional de $f$ na direção de uma normal unitária $\mathbf{n}$ exterior a $S$.

**Exercs. 17-18:** Admita que $S$ e $Q$ satisfaçam as condições do teorema da divergência e que $f$ e $g$ sejam funções escalares com derivadas parciais contínuas. Prove:

**17** $\iiint_Q (f\,\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV = \iint_S (f\,\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS$

(*Sugestão*: Seja $\mathbf{F} = f\,\nabla g$ em (18.26).)

**18** $\iiint_Q (f\,\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV = \iint_S (f\,\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS$

(*Sugestão*: Use a identidade do Exercício 17 juntamente com a obtida permutando $f$ e $g$.)

**Exercs. 19-22:** Admita que $S$ e $Q$ verifiquem as condições do teorema da divergência.

**19** Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo com função potencial $f$ e se div $\mathbf{F} = 0$, prove que

$$\iiint_Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S f\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

**20** Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $V$ é o volume de $Q$, prove que $V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

**21** Se $\mathbf{F}$ tem derivadas parciais segundas contínuas, prove que $\iint_S \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$.

**22** Se $\mathbf{a}$ é um vetor constante, prove que $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$.

**Exercs. 23-24:** Define-se uma integral de superfície (ou tripla) de uma função vetorial como a soma das integrais de superfície (ou triplas) de cada componente da função. Com isto, e admitindo que $S$ e $Q$ verifiquem as condições do teorema da divergência, estabeleça o resultado.

**23** $\iint_S \mathbf{F} \times \mathbf{n}\, dS = -\iiint_Q \nabla \times \mathbf{F}\, dV$

(*Sugestão*: Aplique o teorema da divergência e o Exercício 26 da Seção 18-1 a $\mathbf{c} \times \mathbf{F}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.)

**24** $\iint_S f\mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \nabla f\, dV$

(*Sugestão:* Aplique o teorema da divergência a $f\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.)

**25** Se $\mathbf{F}$ é ortogonal a $S$ em cada ponto $(x, y, z)$ prove que $\iiint_Q \text{rot}\, \mathbf{F}\, dV = 0$.

**26** Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de $(x, y, z)$ e $r = \|\mathbf{r}\|$, prove que $\iiint_Q \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{2}\iint_S r^2\mathbf{n}\, dS$.

**27** Um tanque cilíndrico vazio de 2 dm de diâmetro e 10 dm de comprimento está imerso em um líquido cuja densidade é de 62,5 kg/dm$^3$. A *força de flutuabilidade* no tanque é dada por $-\iint_S p\,\mathbf{n}\, dS$, onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior à superfície $S$ do tanque e $p$ é a pressão exercida pela água em $S$. Use a fórmula

$$\iint_S p\mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \nabla p\, dV$$

(ver Exercício 24) para calcular a força de flutuabilidade. (*Sugestão:* Se a superfície da água coincide com o plano-$xy$, então $p = -62{,}5z$ onde $z$ é a profundidade do líquido.)

## 18.7 O TEOREMA DE STOKES

Em (18.21), enunciamos a seguinte forma vetorial do teorema de Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R (\text{rot}\, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

onde a curva plana $C$ é a fronteira de $R$. Este resultado pode ser estendido a uma curva fechada simples parcialmente suave $C$ em três dimensões que seja a fronteira de uma superfície $S$. A Figura 18.55 ilustra o caso em que $S$ é o gráfico de $z = f(x, y)$, $f$ tem derivadas parciais primeiras contínuas e a projeção $C_1$ de $C$ sobre o plano-$xy$ é uma curva que delimita uma região $R$ do tipo considerado no teorema de Green. Na figura, $\mathbf{n}$ é uma normal unitária *superior* de $S$. Tomamos a direção positiva ao longo de $C$ como a direção que corresponde à direção positiva

ao longo de $C_1$. O vetor $\mathbf{T}$ é um vetor unitário tangente a $C$ que aponta na direção positiva. Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região contendo $S$, então temos o teorema de Stokes, assim, denominado em homenagem ao matemático e físico inglês George G. Stokes (1819-1903).

**Teorema de Stokes (18.28)**

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, dS = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Pode-se enunciar o teorema de Stokes como segue: *A integral curvilínea do componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *tomada uma vez ao longo de C na direção positiva é igual à integral de superfície do componente normal de rot* $\mathbf{F}$ *sobre S*. Se $\mathbf{F}$ é um campo de forças, o teorema afirma que o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de $C$ é igual ao fluxo de rot $\mathbf{F}$ sobre $S$. Pode-se também escrever a integral curvilínea em (18.28) como $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição do ponto $(x, y, z)$ em $C$. Para abordar situações mais gerais do que a exibida na Figura 18.55, devemos considerar uma superfície *orientada* $S$ e definir uma direção positiva ao longo de $C$ de uma forma conveniente. (Em textos mais avançados podemos encontrar a demonstração do teorema de Stokes.)

**EXEMPLO 1**

Seja S a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e seja $C$ o traço de $S$ no plano-$xy$. Verifique o teorema de Stokes (18.28) para o campo vetorial $\mathbf{F} = 3z\,\mathbf{i} + 4x\,\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$.

**SOLUÇÃO**

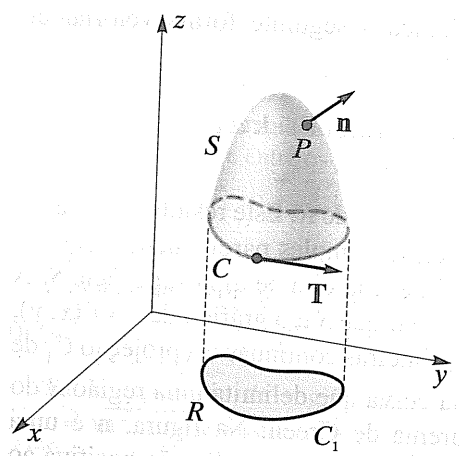


**Figura 18.55**

Devemos mostrar que as duas integrais no Teorema (18.28) têm o mesmo valor.

A superfície é a mesma que a considerada no Exemplo 5 da Seção 18.5 (ver Figura 18.48), onde obtivemos

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Por (18.6),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Conseqüentemente,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS$$

Aplicando (18.23)(i) para calcular esta integral de superfície, temos

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R (4x + 6y + 4)\, dA$$

onde $R$ é a região do plano-$xy$ delimitada pelo círculo de raio 3 e centro na origem. Passando para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (4r\cos\theta + 6r\,\text{sen}\,\theta + 4)r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 [(4\cos\theta + 6\,\text{sen}\,\theta)r^2 + 4r]\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ (4\cos\theta + 6\,\text{sen}\,\theta)\tfrac{1}{3}r^3 + 2r^2 \right]_0^3 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (36\cos\theta + 54\,\text{sen}\,\theta + 18)\, d\theta \\ &= \left[ 36\,\text{sen}\,\theta - 54\cos\theta + 18\theta \right]_0^{2\pi} = 36\pi\end{aligned}$$

A integral curvilínea do teorema de Stokes (18.28) pode ser escrita

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 3z\, dx + 4x\, dy + 2y\, dz$$

onde $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 9$ no plano-$xy$. Como $z = 0$ em $C$, esta integral curvilínea se reduz a

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 4x\, dy = 4\oint_C x\, dy$$

Pelo teorema (18.20), $\oint_C x\, dy$ é a área da região (um círculo de raio 3) delimitada por $C$ e, assim,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4(9\pi) = 36\,\pi,$$

que é mesmo que o valor da integral de superfície.

---

Por meio do teorema de Stokes podemos obter uma interpretação física do rot $\mathbf{F}$. Se $P$ é um ponto arbitrário, seja $S_k$ um disco circular de raio $k$ e cenro em $P$ e denotemos por $C_k$ a fronteira de $S_k$ (ver Figura 18.56). Aplicando o teorema de Stokes e um teorema do valor médio para integrais duplas, somos conduzidos a

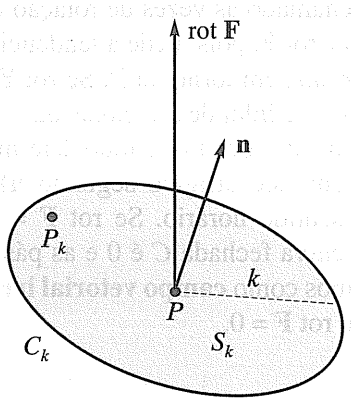



**Figura 18.56**

$$\oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_{S_k} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = [\text{ rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_{P_k} (\pi k^2),$$

onde $P_k$ é um ponto interior de $S_k$ e $\pi k^2$ é a área de $S_k$. Assim,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_{P_k} = \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Fazendo $k \to 0$, então $P_k \to P$ e, assim, obtemos o seguinte:

**(Rot F) · n como um limite (18.29)**

$$[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_P = \lim_{k \to 0} \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Se $\mathbf{F}$ é um campo de velocidade de um fluido, a integral curvilínea $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ é a **circulação em torno de** $C$. Mede a tendência média do fluido de se mover, ou circular, ao longo da curva. Vê-se de (18.29) que $[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_P$ nos dá informação sobre o movimento do fluido ao longo da circunferência de um disco circular que é perpendicular a $\mathbf{n}$, quando o disco tende a reduzir-se a um ponto. Como $[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}]_P$ toma seu valor máximo quando $\mathbf{n}$ é paralelo a rot $\mathbf{F}$, a direção de rot $\mathbf{F}$ em $P$ é a direção para a qual a circulação ao longo da fronteira de um disco perpendicular a rot $\mathbf{F}$ toma seu valor máximo, quando o disco tende a reduzir-se a um ponto.

Para visualizar estas idéias, consideremos uma roda de pás miniatura (ou imaginária), ou **medidor de rotacional**, do tipo exibido na Figura 18.57. Um campo de velocidade que atue sobre as pás pode fazer com que a roda gire em seu eixo. Se $\mathbf{n}$ é um vetor unitário dirigido segundo o eixo, o conjunto girará mais rapidamente quando $\mathbf{n}$ for paralela a rot $\mathbf{F}$.

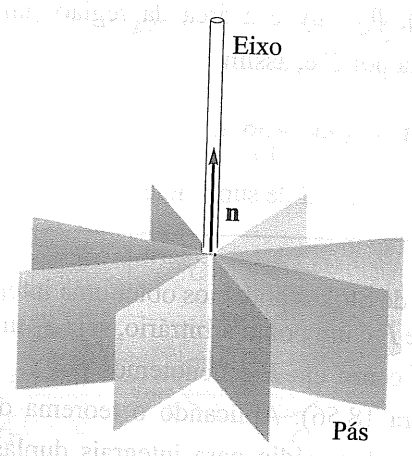


**Figura 18.57** Medidor de fluxo.

O escalar (rot $\mathbf{F}$) · $\mathbf{n}$ é chamado às vezes de rotação de $\mathbf{F}$ em torno de $\mathbf{n}$, e se denota por rot $\mathbf{F}$, pois mede a tendência do campo vetorial de girar, ou *rotar*, em torno de $P$. Se rot $\mathbf{F} > 0$ em toda uma região contendo o medidor de rotacional da Figura 18.57, as pás giram em sentido anti-horário (sentido determinado pela regra do polegar, com este dirigido segundo $\mathbf{n}$). Se rot $\mathbf{F} < 0$, as pás giram em sentido horário. Se rot $\mathbf{F} = 0$, a circulação ao longo de toda curva fechada $C$ é 0 e as pás não giram. Por esta razão, definimos como **campo vetorial irrotacional** $\mathbf{F}$ o campo para o qual rot $\mathbf{F} = 0$.

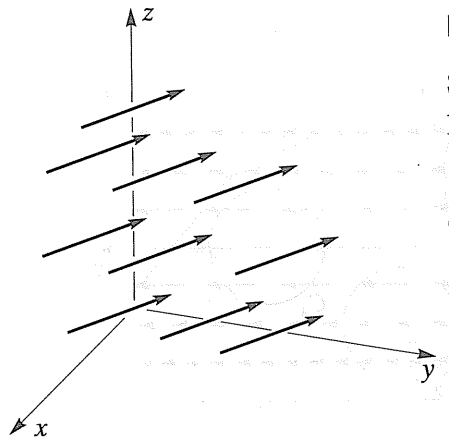


Figura 18.58

## EXEMPLO 2

Se $\mathbb{F}(x, y) = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ e $a, b, c$ são constantes, discuta as propriedades rotacionais do campo $\mathbb{F}$.

## SOLUÇÃO

Todo vetor do campo $\mathbb{F}$ tem o mesmo módulo e a mesma direção, conforme ilustrado na Figura 18.58, onde $a$, $b$ e $c$ são positivos. Inserindo um medidor de rotacional em um ponto arbitrário deste campo vetorial, as pás não giram. Note que

$$\text{rot } \mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{F} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Logo, $\mathbb{F}$ é irrotacional.

## EXEMPLO 3

Seja $\mathbb{F}(x, y, z) = 3(y^2 + 1)^{-1}\,\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ com $|y| \leq 4$.

**(a)** Descreva o campo vetorial $\mathbb{F}$ e discuta a circulação de $\mathbb{F}$ ao longo de vários círculos $C_k$ do plano-$xy$.

**(b)** Onde (rot $\mathbb{F}$) $\cdot\, \mathbf{n}$ toma seu valor máximo?

## SOLUÇÃO

**(a)** Restringindo nossa atenção ao plano-$xy$, os vetores de $\mathbb{F}$ formam o padrão da Figura 18.59. (Verifique.) O mesmo padrão se repete em qualquer plano paralelo ao plano-$xy$.

Consideremos $\mathbb{F}$ como o campo de velocidade de um fluido que corre em um canal. Note que a velocidade do fluido é máxima ao longo do eixo-$x$ e diminui à medida que o ponto $(x, y)$ se aproxima de uma das retas $y = \pm 4$. Considerando o círculo $C_1$, então evidentemente $\oint_{C_1} \mathbb{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$, pois, quando $C_1$ é percorrido na direção positiva, o componente tangencial $\mathbb{F} \cdot \mathbf{T}$ é grande e positivo na metade inferior de $C_1$ e negativo (mas próximo de 0) na metade superior. Introduzindo um medidor de rotacional no centro de $C_1$, com seu eixo perpendicular ao plano-$xy$, as pás girariam no sentido anti-horário.

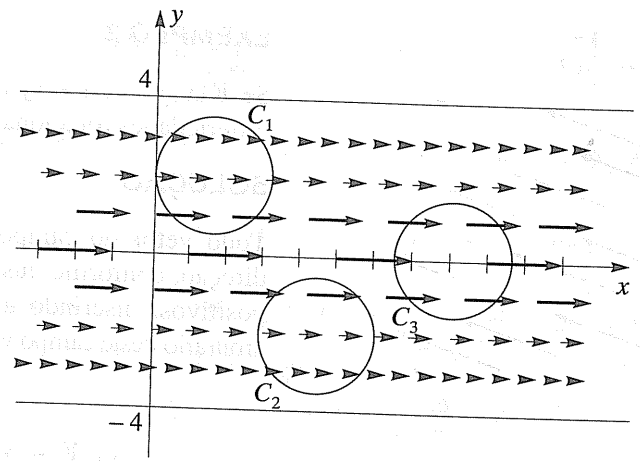



**Figura 18.59**

Novamente considerando valores de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, vemos que $\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ e $\oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$. Um medidor de rotacional para $C_2$ giraria em sentido horário, e um medidor para $C_3$ não giraria.

**(b)** Aplicando (18.6), obtemos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{6y}{(y^2 + 1)^2}\,\mathbf{k}$$

Como o unitário da normal $\mathbf{n}$ é $\mathbf{k}$,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{6y}{(y^2 + 1)^2}$$

Note que $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ é positivo para pontos acima do eixo-$x$, negativo para pontos abaixo do eixo-x e 0 para pontos do eixo-x. Diferenciando em relação a y, temos

$$D_y[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] = \frac{6(1 - 3y^2)}{(y^2 + 1)^3}$$

e, então, os números críticos para $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ são $y = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0{,}577$.

Pelo teste da derivada primeira, vemos que esses números conduzem a valores máximos. Assim, os valores máximos de $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ ocorrem em qualquer ponto de uma das retas horizontais $y = \pm 1/\sqrt{3}$.

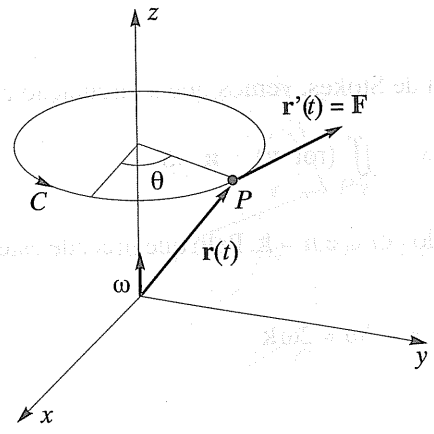



**Figura 18.60**

Para demonstrar outra ligação entre rot $\mathbb{F}$ e os aspectos rotacionais do movimento, consideremos um fluido girando uniformemente em torno do eixo-$z$, como se fosse um corpo rígido. Se nos concentrarmos em uma única partícula do fluido no ponto $P(x, y, z)$ e se $x$, $y$ e $z$ são funções do tempo $t$, então temos uma situação análoga à ilustrada na Figura 18.60, onde $r(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição de $P$, e $\omega = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$ é a velocidade angular (constante). Referindo-nos à Figura 18.60, vemos que $d\theta/dt = \|\omega\|$. Denotando o vetor velocidade $r'(t)$ de $P$ por $\mathbb{F}$, então, como no Exemplo 4 da Seção 15.3,

$$\mathbb{F} = \omega \times \mathbf{r} = (\omega_2 z - \omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\mathbf{k}$$

Por (18.6),

$$\text{rot } \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$$

Como $\omega$ é um vetor constante, pode-se verificar que

$$\text{rot } \mathbb{F} = 2\omega_1\mathbf{i} + 2\omega_2\mathbf{j} + 2\omega_3\mathbf{k} = 2\omega$$

Isto mostra que o módulo de rot $\mathbb{F}$ é duas vezes a velocidade angular, e a direção de rot $\mathbb{F}$ é segundo o eixo de rotação.

Podemos aplicar o que precede ao campo de velocidade $\mathbb{F}$ do vento no interior do núcleo de um tornado. (Costumamos chamar $\mathbb{F}$ a *velocidade tangencial* do vento). O estudo da circulação ao longo de uma curva $C$ no interior do núcleo é importante na análise de um tornado. No próximo exemplo, calcularemos a circulação quando $C$ é um círculo.

## EXEMPLO 4

O núcleo de um tornado gira como se fosse um corpo rígido, da maneira ilustrada na Figura 18.60, onde a velocidade angular do vento $\omega = d\theta/dt$ é constante. Se $C$ é um círculo de raio $a$ em uma secção transversa do núcleo, conforme exibido na figura, o módulo da velocidade tangencial do vento $\mathbf{v}$ é $\|\mathbf{v}\| = \omega a$.

Ache a circulação de $\mathbf{v}$ ao longo de $C$

**(a)** utilizando o teorema de Stokes,

**(b)** calculando $\displaystyle\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$

## SOLUÇÃO

**(a)** Aplicando o teorema de Stokes, vemos que a circulação é

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

onde $S$ é o disco delimitado por $C$ e $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Pelo que precede este exemplo,

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega = 2\omega\mathbf{k}$$

Logo

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (2\omega\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}\, dS$$

$$= 2\omega \iint_S dS$$

$$= 2\omega\pi a^2$$

Isto mostra que quando o raio $a$ de $C$ aumenta, a tendência do vento de se mover ao longo de $C$ também aumenta.

**(b)** Como $\mathbf{T}$ é um vetor unitário tangente a $C$ com a mesma direção de $\boldsymbol{v}$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = \|\mathbf{v}\|\, \|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{v}\|$$

(ver Teorema (14.19)). Logo

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \|\mathbf{v}\|\, ds = \omega a \int_C ds$$

$$= \omega a(2\pi a) = 2\omega\pi a^2$$

## EXEMPLO 5

Em pontos exteriores ao núcleo, um tornado não gira como se fosse um corpo rígido. Seja $r_0$ o raio do núcleo e seja $\omega$ a velocidade angular (constante) do vento dentro do núcleo, como no Exemplo 4. Se C é uma secção transversa circular de raio $r > r_0$, conforme ilustrado na Figura 18.60, então o módulo da velocidade tangencial do vento $\mathbf{v}$ em $C$ é (aproximadamente) $\|\mathbf{v}\| = \omega r_0^2/r$.

**(a)** Mostre que a circulação ao longo de $C$ é a mesma para todo $r > r_0$.

**(b)** Mostre que rot $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ fora do núcleo.

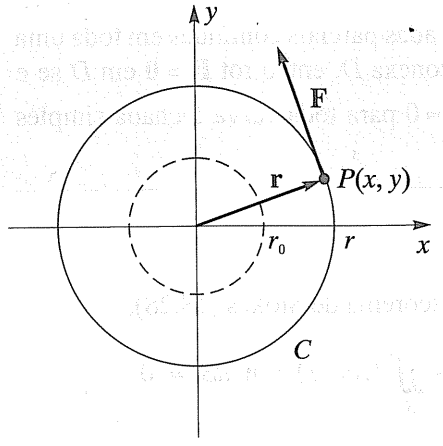



Figura 18.61

**SOLUÇÃO**

**(a)** A circulação ao longo de qualquer círculo $C$ de raio $r > r_0$ é

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \|\mathbf{v}\|\, ds$$

$$= \frac{\omega r_0^2}{r} \int_C ds$$

$$= \frac{\omega r_0^2}{r}\, 2\pi r = 2\pi\omega r_0^2$$

**(b)** A Figura 18.61 exibe a vista de uma secção transversa do tornado. Ali, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é o vetor posição de um ponto $P(x, y)$ em $C$ e $\|\mathbf{r}\| = r$. No Exemplo 1 da Seção 18.1, provamos que $\mathbb{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ é ortogonal a $\mathbf{r}$ em todo ponto $(x, y)$, conforme ilustrado na figura. Logo, um vetor *unitário* $\mathbf{u}$ na direção de $\mathbb{F}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

Como o módulo de $\mathbf{v}$ é $\omega r_0^2/r$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\mathbf{v} = \frac{\omega r_0^2}{r}\, \mathbf{u} = \frac{\omega r_0^2}{x^2 + y^2}\, (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

Aplicando a Definição (18.6), obtemos

$$\text{rot}\, \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

---

Em nosso estudo de integrais curvilíneas independentes do caminho, introduzimos a noção de região simplesmente conexa. Este conceito pode ser estendido a três dimensões, entretanto, a definição usual exige propriedades de curvas e superfícies estudadas somente em cursos mais avançados. Para nosso objetivo, uma região $D$ em três dimensões será **simplesmente conexa** se toda curva fechada simples $C$ em $D$ for a fronteira de uma superfície $S$ em $D$ que verifique as condições do teorema de Stokes. Em regiões deste tipo, qualquer curva fechada pode ser continuamente deformada até reduzir-se a um ponto em $D$, sem cruzar a fronteira de $D$. Por exemplo, a região interior de uma esfera ou de um paralelepípedo é simplesmente conexa. Já a região interior de um toro (uma superfície em forma de câmara de ar) não é simplesmente conexa. Com esta restrição, podemos estabelecer o seguinte resultado.

**Teorema (18.30)**

Se $\mathbb{F}(x, y, z)$ tem derivadas parciais contínuas em toda uma região simplesmente conexa $D$, então rot $\mathbb{F} = \mathbf{0}$ em $D$ se e somente se $\oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples $C$ em $D$.

## DEMONSTRAÇÃO

Se rot $\mathbb{F} = 0$, então, pelo teorema de Stokes (18.28),

$$\oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbb{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

Reciprocamente, suponhamos $\oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples $C$. Se, em algum ponto $P$, rot $\mathbb{F} \neq \mathbf{0}$, então, por continuidade, existe uma subregião de $D$ contendo $P$ tal que rot $\mathbb{F} \neq 0$ em toda ela. Se, nesta sub-região, escolhemos um disco circular do tipo ilustrado na Figura 18.56 com $\mathbf{n}$ paralelo a rot $\mathbb{F}$, então

$$\oint_{C_k} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_k} (\text{rot } \mathbb{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS > 0$$

uma contradição. Conseqüentemente, rot $\mathbb{F} = \mathbf{0}$ em toda a região $D$.

Se $\mathbb{F}$ é contínua em uma região conveniente, então a condição $\oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples é equivalente à independência do caminho. Além disso, como no Teorema (18.13), a independência do caminho é equivalente a $\mathbb{F} = \nabla f$ para alguma função escalar $f$ (isto é, $\mathbb{F}$ é conservativo). Combinando estes fatos com o Teorema (18.30), obtemos:

**Teorema (18.31)**

Se $\mathbb{F}(x, y, z)$ tem derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região simplesmente conexa $D$, então as condições seguintes são equivalentes:

**(i)** $\mathbb{F}$ é conservativo, isto é, $\mathbb{F} = \nabla f$ para alguma função escalar $f$.

**(ii)** $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em $D$.

**(iii)** $\oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples $C$ em $D$.

**(iv)** $\mathbb{F}$ é irrotacional, isto é, rot $\mathbb{F} = \mathbf{0}$.

## EXEMPLO 6

Prove que, se $\mathbb{F}(x, y, z) = (3x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} - 3z^2\,\mathbf{k}$, então $\mathbb{F}$ é conservativo.

## SOLUÇÃO

A função $\mathbb{F}$ tem derivadas parciais primeiras contínuas para todo $(x, y, z)$. Como

$$\text{rot } \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + y^2 & 2xy & -3z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (2y - 2y)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$\mathbb{F}$ é conservativo, pelo Teorema (18.31)(iv).

## EXERCÍCIOS 18.7

**Exercs. 1-4:** Verifique o teorema de Stokes (18.28) para $\mathbb{F}$ e $S$.

1 $\mathbb{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$;

$S$ é a parte no primeiro octante do plano $x + y = z = 1$.

2 $\mathbb{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

$S$ é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3 $\mathbb{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$;

$S$ é o hemisfério $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

4 $\mathbb{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

$S$ é a parte do cone $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ interceptada pelo plano $z = 1$.

5 Se $\mathbb{F} = (3z - \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (x^2 + e^y)\mathbf{j} + (y^3 - \cos z)\mathbf{k}$, use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $C$ é a curva dada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

6 Se $\mathbb{F} = yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ e $C$ é o quadrado de vértices $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 2)$ e $(0, 1, 2)$, use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$.

7 Se $\mathbb{F} = 2y\mathbf{i} + e^2\mathbf{j} - \operatorname{arctg} x\mathbf{k}$ e $S$ é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ interceptado pelo plano-$xy$, use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$

8 Se $\mathbb{F} = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$ e $S$ é a região delimitada pelo triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$, use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

**Exercs. 9-12:** Esboce alguns campos vetoriais $\mathbb{F}(x, y, z)$ e discuta as propriedades rotacionais de $\mathbb{F}$ utilizando um medidor de rotacional e rot $\mathbb{F}$. Onde (rot $\mathbb{F}$) $\cdot$ $\mathbf{n}$ atinge seu valor máximo?

9 $\mathbb{F}(x, y, z) = (y^2 - 2y)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$; $0 \leq y \leq 2$

10 $\mathbb{F}(x, y, z) = 0\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$; $0 \leq x \leq \pi$

11 $\mathbb{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ (ver Exemplo 1 da Seção 18.1 e a discussão que segue o Exemplo 3 da Seção 18.7).

12 O campo quadrado inverso da Definição (18.2).

13 Se $\mathbb{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (x + e^z)\mathbf{j} + (1 + ye^z)\mathbf{k}$, prove que $\mathbb{F}$ é irrotacional.

14 Um campo vetorial $\mathbb{F}$ é um *campo central de forças* se $\mathbb{F} = f(r)\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \|\mathbf{r}\|$, e $f$ é uma função escalar. Se $f$ é diferenciável, mostre que $\mathbb{F}$ é irrotacional.

15 Seja $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior em um ponto $P$ da superfície de uma esfera $S$. Se $\mathbb{F}$ tem derivadas parciais primeiras contínuas em $S$ e em seu interior, prove que $\iint_S \text{rot } \mathbb{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ por meio (a) do teorema da divergência; (b) do teorema de Stokes.

16 Se $S$ e $C$ verificam as condições do teorema de Stokes e se $\mathbb{F}$ é uma função vetorial constante, use (18.28) para provar que $\oint_C \mathbb{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$.

**Exercs. 17-19:** Estabeleça a identidade, na hipótese de $C$ e $S$ verificarem as condições do teorema de Stokes.

**17** $\oint_C f\,\nabla g \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS$, $f$ e $g$ funções escalares.

**18** $\oint_C \mathbf{a} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 2\mathbf{a} \cdot \iint_S \mathbf{n}\,dS$, $\mathbf{a}$ vetor constante.

**19** $\oint_C f\,d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \times \nabla f\,dS$, $f$ uma função escalar.

**20** Se $M$, $N$ e $P$ são funções de $x$, $y$ e $z$ dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa, prove que

$$\int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$$

é independente do caminho se e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

## 18.8 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

**Exercs. 1-4:** Esboce alguns vetores típicos do campo vetorial $\mathbf{F}$.

**1** $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

**2** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**3** $\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{k}$

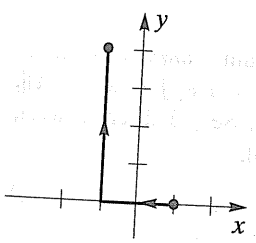
**4** $\mathbf{F}(x\,y, z) = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

**5** Ache um campo vetorial conservativo em duas dimensões que tenha a função potencial $f(x, y) = y^2 \operatorname{tg} x$.

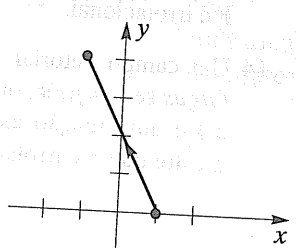
**6** Ache um campo vetorial conservativo em três dimensões que tenha a função potencial $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$.

**Exercs. 7-10:** Calcule $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$, onde C é a curva de $(1, 0)$ a $(-1, 4)$ exibida na figura.

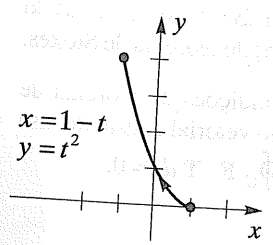
**7**



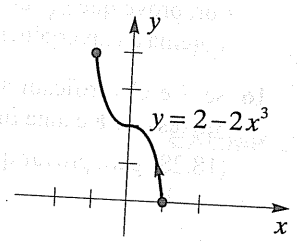

**8**




**9**




**10**




**11** Calcule $\int_C xy\,ds$; $C$ é o gráfico de $y = x^4$ de $(-1, 1)$ a $(2, 16)$.

**Exercs. 12-14:** Calcule:

$$\int_C x\,dx + (x + y)\,dy + (x + y + z)\,dz$$

para a curva $C$ dada de $A$ $(0, 0, 0)$ a $B$ $(2, 4, 8)$.

**12** $C$ consiste em três segmentos de reta, o primeiro paralelo ao eixo-$z$, o segundo paralelo ao eixo-$x$ e o terceiro paralelo ao eixo-$y$.

**13** $C$ consiste no segmento de $A$ e $B$.

**14** $C$ tem a parametrização $x = 1$, $y = t^2$, $z = t^3$.

**15** Se $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ e $C$ dada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $-\pi \le t \le 0$, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

**16** A força $\mathbf{F}$ em um ponto $(x, y, z)$ em três dimensões é dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$. Se $C$ é o quadrado de vértices $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(-1, 1, 1)$, $A_3$ $(-1, -1, 1)$ e $A_4(1, -1, 1)$, ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ quando seu ponto de aplicação percorre $C$ uma vez na direção dos índices crescentes de $A_k$.

**Exercs. 17-18:** Prove que a integral curvilínea é independente do caminho e ache seu valor.

**17** $\int_{(1,-1)}^{(2,3)} (x + y)\,dx + (x + y)\,dy$

**18** $\int_{(0,0,0)}^{(2,1,3)} (8x^3 + z^2)\,dx - 3z\,dy + (2xz - 3y)\,dz$

**19** Se $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xe^{2y}\mathbf{i} + 2(x^2e^{2y} + y \cot z)\mathbf{j} - y^2 \csc^2 z\mathbf{k}$, prove que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, e ache uma função potencial $f$ para $\mathbf{F}$.

**Exercs. 20-22:** Use o teorema de Green para calcular a integral curvilínea.

$$\oint_C xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$$

se $C$ é a curva dada.

**20** $C$ é a curva fechada determinada por $y = x^2$ e $y - x = 2$ entre $(-1, 1)$ e $(2, 4)$.

**21** $C$ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

**22** $C$ é o círculo $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

**23** Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3z^4\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$, ache div $\mathbf{F}$ e rot $\mathbf{F}$.

**24** Se $f$ e $g$ são funções escalares de três variáveis prove que $\nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$.

**25** Calcule $\iint_S xyz\,dS$ se $S$ é a parte do plano $z = x + y$ acima da região triangular do plano $xy$ de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 2, 0)$.

**26** Calcule $\iint_S x^2 z^2\,dS$ se $S$ é a metade superior do cilindro $y^2 + z^2 = 4$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

**27** Seja $Q$ a região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 1$. Se $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, use o teorema da divergência para achar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$, onde $S$ é a superfície de $Q$ e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a $S$.

**28** Verifique o teorema da divergência se $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ e $S$ é a superfície do paralelepípedo retângulo delimitado pelos planos $x = \pm 1, y = \pm 2, z = \pm 3$.

**Exercs. 29-30:** Verifique o teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ e $S$.

**29** $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$;

$S$ é o hemisfério $z = (4 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

**30** $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$;

$S$ é a região delimitada pelo triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

## EXERCÍCIOS 15.5

**1** $\dfrac{4t}{(4t^2+9)^{1/2}}; \dfrac{6}{(4t^2+9)^{1/2}}; \dfrac{6}{(4t^2+9)^{3/2}}$

**3** $\dfrac{6t(t^2+2)}{(t^4+4t^2+1)^{1/2}}; \dfrac{6(t^4+t^2+1)^{1/2}}{(t^4+4t^2+1)^{1/2}};$

$\dfrac{2(t^4+t^2+1)^{1/2}}{3(t^4+4t^2+1)^{3/2}}$

**5** $\dfrac{t}{(1+t^2)^{1/2}}; \dfrac{2+t^2}{(1+t^2)^{1/2}}; \dfrac{2+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$

**7** $\dfrac{-65 \operatorname{sen} t \cos t}{(16 \operatorname{sen}^2 t + 81 \cos^2 t + 1)^{1/2}};$

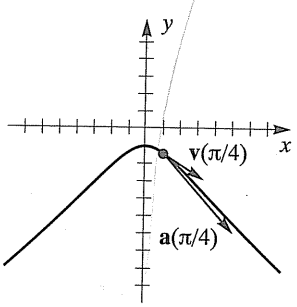
$\dfrac{(81 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t + 1.296)^{1/2}}{(16 \operatorname{sen}^2 t + 81 \cos^2 t + 1)^{1/2}};$

$\dfrac{(81 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t + 1.296)^{1/2}}{(16 \operatorname{sen}^2 t + 81 \cos^2 t + 1)^{3/2}};$

**9** $\dfrac{36}{\sqrt{5}} \approx 16{,}10; \dfrac{18}{\sqrt{5}} \approx 8{,}05$

## 15.7 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

**1**




**3** $2t\mathbf{i} + (8t - 4t^3)\mathbf{j}$; $2\mathbf{i} + (8 - 12t^2)\mathbf{j}$;
$2|t|\sqrt{17 - 16t^2 + 4t^4}$

**5** (a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ (b) $x = t, y = 1 + t, z = 1 + t$

**7** $0, \dfrac{10}{3}$

**9** $3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$, $6t\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$, $\sqrt{34}$; $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$,
$6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, $\sqrt{34}$

**11** $2\mathbf{i} + \dfrac{1}{4}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**13** $\mathbf{r}(t) = (3t - 4)\mathbf{i} + (2t^3 - 8t + 9)\mathbf{j} + \left(\dfrac{5}{2}t^2 - t\right)\mathbf{k}$

**17** $\dfrac{108}{82^{3/2}} \approx 0{,}15$ **19** $\pm\dfrac{\sqrt{36 + \sqrt{3.096}}}{90} \approx \pm 1{,}009$

**21** $\dfrac{5}{6}\sqrt{5} \approx 1{,}86$ **23** $\dfrac{-8 \cos 2t \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} t \cos t}{(4 \cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}};$
$\dfrac{2|\cos 2t \cos t + 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t|}{(4 \cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}}$

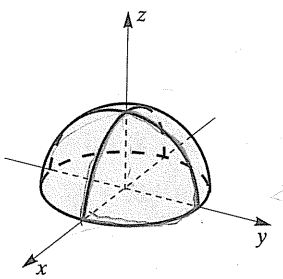
# CAPÍTULO 16

## EXERCÍCIOS 16.1

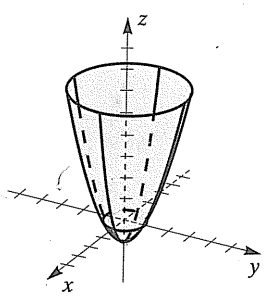
**1** $\mathbb{R}^2$; $-29, 6, -4$ **3** $\{(u, v): u \neq 2v\}$; $-\dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{9}, 0$

**5** $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$; $4$, $2\sqrt{3}$

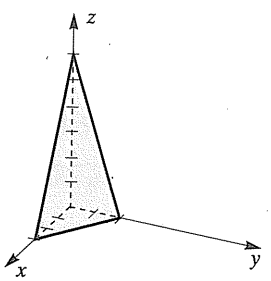
**7**



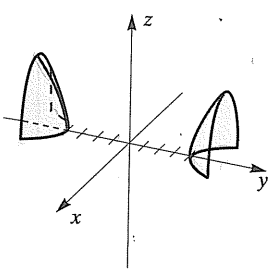

**9**



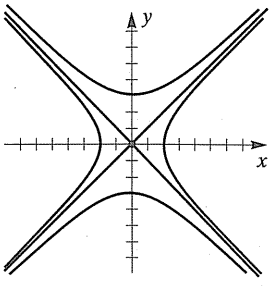

**11**



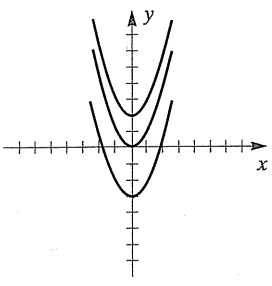

**13**



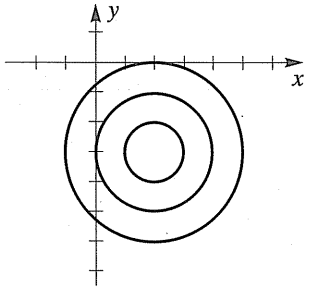
**15**




**17**




**19**




**21** $y \operatorname{arctg} x = \pi$

**23** $x^2 + 4y^2 - z^2 = -1$

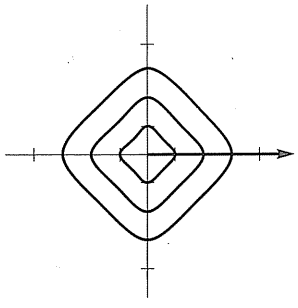
**25** **(a)** Elipses **(b)** Nenhuma **(c)** Nenhuma

**27** **(a)** $k > 8$; nenhuma; $k = 8$; o ponto $(0, 0, 8)$; $0 < k < 8$; círculos.

**(b)** Nenhuma **(c)** Nenhuma

**29** (d) **31** (a) **33** (f)

**35**



**37** Nenhum; a origem; a esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 2.

**39** Planos com intercepto-$x$ $k$, intercepto-$y$ $\frac{k}{2}$, intercepto-$z$ $\frac{k}{3}$.

**41** Nenhum; o eixo-$z$; o cilindro circular reto tendo o eixo-$z$ como eixo e raio 2.

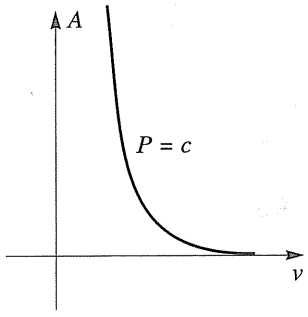
**43** **(a)** círculos com centro na origem.

**(b)** $x^2 + y^2 = 100$

**45** Cinco; esferas com centros na origem; a força $F$ é constante se $(x, y, z)$ se move ao longo de uma superfície de nível.

**47** **(a)** $P = kAv^3$, $k > 0$

**(b)** Uma curva de nível típica (ver figura) mostra as combinações de áreas e velocidades de vento que resultam em uma potência fixa $P = c$.




**(c)** $Av^3 = 36 \cdot 10^3\pi$

**49** Exemplo: 5'11'' e 175 lb são aproximadamente 180 cm e 80 kg. Pelo gráfico, temos uma área de aproximadamente 2,0 $m^2$. Usando a fórmula, obtemos $S \approx 1{,}996\ m^2$.

## EXERCÍCIOS 16.2

**1** $-\frac{2}{3}$ **3** 1 **5** 0 **7** 0 **9** $\frac{1}{2}$

**Exercs. 11-20:** A resposta dá equações de possíveis trajetórias, e seus valores resultantes, para usar em (16.4).

**11** $x = 0, -\frac{1}{2}$; $y = 0{,}2$ **13** $y - 2 = m(x - 1)$, $\frac{m}{1 + m^2}$

**15** $y = 2x$, $\frac{12}{31}$; $y = 0, 0$ **17** $x = y = 0, 0$; $x = y = z, 1$

**19** $x = at,\ y = bt,\ z = ct,\ \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$

**21** 0 **23** 1 **25** $\{(x, y): x + y > 1\}$

**27** $\{(x, y): x \geq 0 \text{ e } |y| \leq 1\}$

**29** $\{(x, y, z): z^2 \neq x^2 + y^2\}$

**31** $\{(x, y, z): x \geq 2, yz > 0\}$

**33** 0 **35** $\dfrac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4}{x^2 - y^2}; \left\{(x, y): x^2 \neq y^2\right\}$

**37** $x^2 + 2x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y + 1; \left\{(x, y): y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right\}$

**39** $e^{x^2 + 2y}; (x^2 + 2y)(x^2 + 2y - 3); e^{2t} + 2(t^2 - 3t)$

**41** $2x^2 - 3xy - 2y^2 - x + 7y$

**43** $\lim\limits_{(x, y, z, w) \to (a, b, c, d)} f(x, y, z, w) = L$ significa que para todo $\in > 0$ $\delta > 0$ tal que, se

$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + (w-d)^2} < \delta$

então $|f(x, y, z, w) - L| < \in$.

## EXERCÍCIOS 16.3

**1** $f_x(x, y) = 8x^3y^3 - y^2; f_y(x, y) = 6x^4y^2 - 2xy + 3$

**3** $f_r(r, s) = \dfrac{r}{(r^2 + s^2)^{1/2}}; f_s(r, s) = \dfrac{s}{(r^2 + s^2)^{1/2}}$

**5** $f_x(x, y) = e^y + y \cos x; f_y(x, y) = xe^y + \operatorname{sen} x$

**7** $f_t(t, v) = \dfrac{v}{t^2 - v^2}; f_v(t, v) = \dfrac{t}{t^2 - v^2}$

**9** $f_x(x, y) = \cos\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}; f_y(x, y) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$

**11** $f_x(x, y, z) = 6xz + y^2; f_y(x, y, z) = 2xy; f_z(x, y, z) = 3x^2$

**13** $fr(r, s, t) = 2re^{2x} \cos t; f_s(r, s, t) = 2r^2e^{2x} \cos t;$
$f_t(r, s, t) = -r^2e^{2s} \operatorname{sen} t$

**15** $f_x(x, y, z) = e^z - ye^x; f_y(x, y, z) = -e^x - ze^{-y};$ ,
$f_z(x, y, z) = xe^z + e^{-y}$

**17** $f_q(q, v, w) = \dfrac{v}{2\sqrt{qv}\sqrt{1 - qv}};$

$f_v(q, v, w) = \dfrac{q}{2\sqrt{qv}\sqrt{1 - qv}} + w \cos vw;$
$f_w(q, v, w) = v \cos vw$

**19** $w_{xy} = w_{yx} = 4y^3 - 12xy^2$

**21** $w_{xy} = w_{yx} = -6x^2e^{-2y} + 2y^{-3} \operatorname{sen} x$

**23** $w_{xy} = w_{yx} = \dfrac{2xz}{y^2}\ senh\ \dfrac{z}{y}$

**25** $18xy^2 + 16y^3z$

**27** $t^2(\sec rt)(\sec^2 rt + \operatorname{tg}^2 rt)$

**29** $(1 - x^2y^2z^2) \cos xyz - 3xyz \operatorname{sen} xyz$

**31** $w_{rrs} = w_{rsr} = w_{srr} = 36r^2s^2t - 6st^2e^{rt}$

**33** Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

**35** Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x\ \operatorname{senh} y - \operatorname{sen} x \cosh y = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

**37** Mostre que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \cos(x - y) - \dfrac{1}{(x + y)^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

**39** Mostre que $w_{xx} = -c^2e^{-c^2t} \operatorname{sen} cx = w_t$.

**41** Mostre que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2[-k^2(\operatorname{sen} akt)(\operatorname{sen} kx)] = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

**43** Mostre que $u_x = 2x = u_y$ e $u_y = -2y = -v_x$.

**45** Mostre que $u_x = e^x \cos y = v_y$ e $u_y = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x$.

**47** $w_{xx}, w_{xy}, w_{xz}, w_{yx}, w_{yy}, w_{yz}, w_{zx}, w_{zy}, w_{zz}$

**49** Em deg/cm: **(a)** 200 **(b)** 400

**51** Em volts/in.: **(a)** $-\dfrac{100}{9}$ **(b)** $\dfrac{50}{9}$ **(c)** $\dfrac{50}{9}$

**53** $\dfrac{\partial C}{\partial x} \approx -36{,}58\ (\mu g/m^3)/m$ é a taxa à qual a concentração varia na direção horizontal (2, 5).

$\dfrac{\partial C}{\partial y} \approx -0{,}229\ (\mu g/m^3)/m$ é a taxa à qual a concentração varia na direção vertical em (2, 5).

**55** **(a)** 3,57; 4,81; 4,98; $\lim\limits_{p \to \infty} \dfrac{p}{0{,}8 + 0{,}2p} = 5$

**(b)** $\dfrac{p(p - 1)}{q + p(1 - q)^2}$

(c) $p(p-1)$, à medida que o número de processadores aumenta, a taxa de variação do *speedup* também aumenta.

**57** (a) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = T_0\,\omega e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$ é a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo à profundidade $x$.

$\dfrac{\partial T}{\partial x} = -T_0\,\lambda e^{-\lambda x}[\cos(\omega t - \lambda x) + \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)]$ é a taxa de variação da temperatura em relação à profundidade no instante $t$.

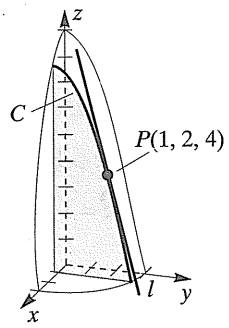
(b) Mostre que $k = \dfrac{2\lambda^2}{\omega}$.

**59** (a) $\dfrac{\partial V}{\partial x} = -0{,}112y$ m$l$/ano é a taxa à qual a capacidade pulmonar decresce com a idade para um adulto homem.

(b) $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 27{,}63 - 0{,}112x$ m$l$/ano é difícil de interpretar porque em geral encaramos a altura $y$ de um adulto como fixa, em lugar de como função da idade $x$.

**61** $e_k = -b_k a_{kk}$ para todo $k$.

**63** $x = 1, y = t, z = -4t + 12$




**65** 0,0079600438, 0,0597349919; 0,0079600333, 0,0598334499

**67** 1,8369; 4,1743

## EXERCÍCIOS 16.4

**1** (a) $10y\,\Delta x - \Delta y - y\,\Delta x + 5(\Delta y)^2 - \Delta x\,\Delta y$

(b) $-y\,dx + (10y - x)\,dy$

(c) $\Delta x\,\Delta y - 5(\Delta y)^2$

**Exercs. 3-6:** As expressões $\in_1$ e $\in_2$ não são únicas.

**3** $\in_1 = -3\,\Delta y;\ \in_2 = 4\,\Delta y$

**5** $\in_1 = 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2;\ \in_2 = 3y\,\Delta y + (\Delta y)^2$

**7** $(3x^2 - 2xy)\,dx + (-x^2 + 6y)dy$

**9** $(2x \operatorname{sen} y)\,dx + (x^2 \cos y + 3y^{1/2})dy$

**11** $xe^{xy}(xy + 2)\,dx + (x^3e^{xy} - 2y^{-3})\,dy$

**13** $[2x \ln(y^2 + z^2)]\,dx + \left(\dfrac{2x^2y}{y^2 + z^2}\right)dy + \left(\dfrac{2x^2z}{y^2 + z^2}\right)dz$

**15** $\left[\dfrac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2}\right]dx + \left[\dfrac{xz(x+z)}{(x+y+z)^2}\right]dy + \left[\dfrac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2}\right]dz$

**17** $(2xz - z^2t)\,dx + (4t^3)\,dy + (x^2 - 2xzt)\,dz + (12yt^2 - xz^2)\,dt$

**19** 7,38 **21** 1,87

**23** (a) $\pm\dfrac{3}{5}$ m$^2$ (b) $\pm\dfrac{47}{80}$ m$^3$

**25** (a) 365 kg (b) ± 11%

**27** ± 0,0185 **29** $\pm\dfrac{6W}{A - W}\%$

**31** ± 7% **33** 2,96

**35** O erro máximo em $z$ *não deve* exceder a ± 2,9 pés.

**37** $\pm 1{,}7\pi$ in.$^2$ **39** Use o Corolário (16.19).

**43** $(x_4, y_4) \approx (1{,}8460,\ 1{,}1546)$

**45** $\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ -g \\ -h \end{bmatrix}$

## EXERCÍCIOS 16.5

**1** $2x \operatorname{sen}(xy) + y(x^2 + y^2)\cos(xy)$;

$2y \operatorname{sen}(xy) + x(x^2 + y^2)\cos(xy)$

**3** $2r(\ln s)^2 + 8r \ln s + 2s \ln s$;

$\dfrac{2r^2 \ln s}{s} + \dfrac{4r^2}{s} + 2r + 2r \ln s$

**5** $3x^2e^{3y} + ye^x + 4x^3y^2$; $3x^3e^{3y} + e^x + 2x^4y$

**7** $3 \ln (uvt) + 3 + \frac{vt}{u}$; $t \ln (uvt) + \frac{3u}{u} + t$;

$v \ln (uvt) + \frac{3u}{t} + v$

**9** $-34y + 6r - 24s$ **11** $\frac{-3(1+t^2)}{(t+1)^4}$

**13** $4 \operatorname{sen}^3 t \cos t + \operatorname{tg} 4t \operatorname{sen} t - 4 \cos t \sec^2 4t$

**15** $\frac{6x^2 + 2xy}{x^2 + 3y^2}$ **17** $\frac{12\sqrt{xy} + y}{6\sqrt{xy} - x}$

**19** $-\frac{2z^3 + 2xy^2}{6xz^2 - 6yz + 4}$; $-\frac{2x^2y - 3z^2}{6xz^2 - 6yz + 4}$

**21** $-\frac{e^{yz} - 2yze^{xz} + 3yze^{xy}}{xye^{yz} - 2xye^{xz} + 3e^{xy}}$;

$-\frac{xze^{yz} - 2e^{xz} + 3xze^{xy}}{xye^{yz} - 2xye^{xz} + 3e^{xy}}$

**23** (a) $0{,}88\pi \approx 2{,}76$ cm$^3$/min

(b) $0{,}3\pi \approx 0{,}94$ cm$^2$/min

**25** $\frac{dT}{dt} = \frac{V}{k}\frac{dP}{dt} + \frac{P}{k}\frac{dV}{dt}$ **27** $-6{,}4$ cm$^3$/min

**29** 762,6 cm$^2$/ano **33** 3 **35** 0

## EXERCÍCIOS 16.6

**1** $-\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$ **3** $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

**5** $-8\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ **7** $-\frac{10}{\sqrt{2}} \approx -7{,}07$

**9** $-\frac{1}{8\sqrt{13}} \approx -0{,}03$ **11** $\frac{67}{8\sqrt{26}} \approx 1{,}64$

**13** $\frac{1}{2\sqrt{26}} \approx 0{,}098$ **15** $16\sqrt{14} \approx 59{,}87$

**17** $\frac{15e^{-2}}{\sqrt{35}} \approx 0{,}34$ **19** $-\frac{12}{\sqrt{10}} \approx -3{,}79$

**21** (a) $-\frac{28}{\sqrt{26}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$; $\sqrt{80}$

(c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$; $-\sqrt{80}$

**23** (a) $-\frac{25}{7\sqrt{22}}$ (b) $-\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{j}$; $+\frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$; 1

(c) $\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$; $-1$

**25** (a) $-\frac{28}{\sqrt{2}}$ (b) A direção de $-12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$

(c) Ache a direção $12\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$

(d) A direção de $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

**27** (a) $-\frac{178}{\sqrt{14}}$ (b) A direção de $4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} = 54\mathbf{k}$

(c) $\sqrt{2.996} \approx 54{,}8$

**29** (b) $\frac{\partial T}{\partial r}$ é a taxa de variação da temperatura na direção normal à fronteira circular.

**31** (b) $\nabla f(1, 2) \approx 1{,}00003333\mathbf{i} - 0{,}111112345\mathbf{j}$;

$\nabla f(1, 2) = \mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j}$

**33** 0,1294 **41** (b) $5 + \sqrt{3}$

## EXERCÍCIOS 16.7

**1** $16(x-2) + 6(y+3) + 6(z-1) = 0$; $x = 2 + 16t$, $y = -3 + 6t$, $z = 1 + 6t$

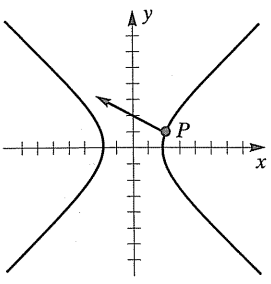
**3** $16(x+2) + 18(y+1) + (z-25) = 0$; $x = -2 + 16t$, $y = -1 + 18t$, $z = 25 + t$

**5** $4(x+5) - 3(y-5) + 20(z-1) = 0$; $x = -5 + 4t$, $y = 5 - 3t$, $z = 1 + 20t$

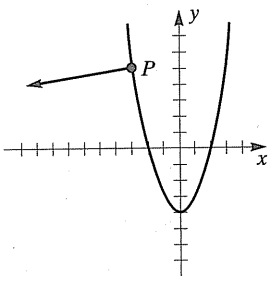
**7** $x + \sqrt{3}\left(y - \frac{\pi}{3}\right) + (z-1) = 0$; $x = t$, $y = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}t$, $z = 1 + t$

**9** $-x + \frac{1}{2}(y-2) - (z-1) = 0$; $x = -t$, $y = 2 + \frac{1}{2}t$, $z = 1 - t$

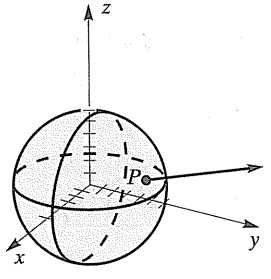
**11**



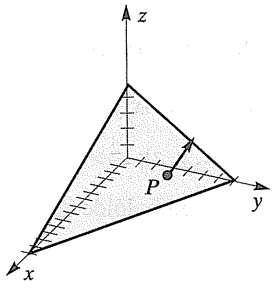

**13**



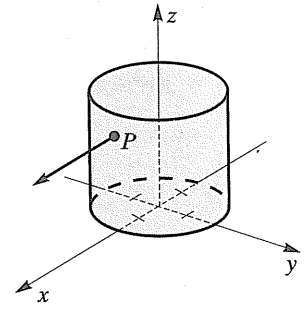

**15**




**17**




**19**




**25** $\left(\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

**31** (1,2718; 1,1787)

## EXERCÍCIOS 16.8

**1** Máx: $f(-2, 1) = 4$ **3** Mín: $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

**5** Mín: $f(0, 0) = 0$

**7** SP: $(0, 0, f(0, 0))$; mín: $f(1, -1) = -1$

**9** SP: $(3, -2, f(3, -2))$,

**11** SP: $(2, 4, f(2, 4)), (-3, -4, f(-3, -4))$;

mín: $f(2, -4) = -\frac{266}{3}$; máx: $f(-3, 4) = \frac{617}{6}$

**13** SP: $(0, 0, f(0, 0))$; mín: $f(4, -8) = -64$;

máx: $f(-1, 2) = -\frac{3}{2}$

**15** SP: $(-2, -\sqrt{3}, f(-2, -\sqrt{3}))$;

mín: $f(-2, \sqrt{3}) = -48 - 6\sqrt{3}$

**17** Não há extremos nem pontos de sela.

**19** Mín: $f(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}) = \frac{12}{\sqrt[3]{2}}$

**21** $(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$; mín: $f(0, 0) = 0$;

máx: $f(0, \pm 1) = \frac{3}{e}$

**23** Mín: $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

máx: $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$

**25** Mín: $f(0, 0) = 0$; máx: $f(4, 3) = 67$

**27** Mín: $f(1, 2) = f(1, -1) = -1$;

máx: $f(-1, -2) = 13$

**29** $\frac{1}{\sqrt{26}}$

**31** $\left(\frac{2}{\sqrt[4]{12}}, \sqrt[4]{12}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}}\right)$,

$\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{12}}, -\sqrt[4]{12}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}}\right)$

**33** Base quadrada, altura $\frac{1}{2}$ do comprimento do lado da base.

**35** $\frac{8}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{12}{\sqrt{3}}$ **37** $1, \frac{4}{3}, 4$

**39** Base quadrada de lado $\sqrt[3]{4}$ cm, altura $2\sqrt[3]{4}$ cm

**41** (18 cm) × (18 cm) × (36 cm)

**43** $\left(2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

**47** $y = \frac{1}{2}x + \frac{8}{3}$

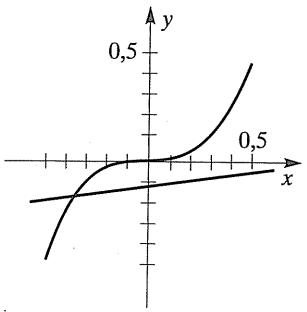
**49** $y = mx + b$ com $m \approx 1{,}23$, $b \approx -18{,}09$; inclinação de 68.

**51** $\left(\frac{14}{11}, \frac{11}{3}\right)$

**53** **(a)** $a + b + c = 2$, $a + 2b + 2c = 2$, $a + 2b + 4c = 3$

**(b)** $4x - y - 2z + 1 = 0$

**55** $(-0{,}35, -0{,}17)$




## EXERCÍCIOS 16.9

**1** Mín: $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$;

máx: $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5$

**3** Mín: $f\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = -5\sqrt{3}$;

máx: $f\left(\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 5\sqrt{3}$

**5** Mín: $f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

**7** Mín: $f(0, -1, 0) = 1$ e $f(2, 1, 0) = 5$

**9** Mín: $f\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}, -1, \frac{8}{3}\right) = -\frac{16}{3\sqrt{3}}$;

máx: $f\left(1, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -1, \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$

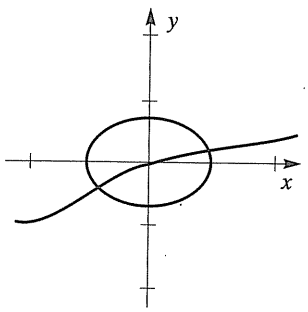
**11** $\left(\frac{6}{\sqrt{29}}, \frac{9}{\sqrt{29}}, \frac{12}{\sqrt{29}}\right)$

**13** Base quadrada de lado $\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$, altura $\frac{7}{2\sqrt[3]{7}}$

**15** $\frac{8}{3}$ **17** Altura igual a duas vezes o raio.

**21** Largura $= 8\sqrt{3}$ cm, profundidade $= \frac{16}{3}\sqrt{6}$ cm.

**23** Máx: $f(0{,}97; 0{,}17) \approx 1{,}55$; mín: $f(-0{,}87, -0{,}35) \approx -2{,}73$




## 16.10 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

**1** $\{(x, y): 4x^2 - 9y^2 \leq 36\}$; a hipérbole $9y^2 - 4x^2 = 108$

**3** $\{(x, y, z): z^2 > x^2 + y^2\}$;

o hiperbolóide de duas folhas $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

**5** $\frac{5}{7}$ **7** NE **9** Lemniscatas; NE

**11** $f_x(x, y) = 3x^2 \cos y + 4$; $f_y((x, y) = -x^3 \operatorname{sen} y - 2y$

**13** $f_x(x, y, z) = \frac{2x}{y^2 + z^2}$; $f_y(x, y, z) = \frac{2y(z^2 - x^2)}{(y^2 + z^2)^2}$;

$f_z(x, y, z) = -\frac{2z(x^2 + y^2)}{(y^2 + z^2)^2}$

**15** $f_x(x, y, z, t) = 2xz\sqrt{2y + t}$;

$f_y(x, y, z, t) = \frac{x^2 z}{\sqrt{(2y + t}}$;

$f_z(x, y, z, t) = x^2\sqrt{2y + t}$; $f_t(x, y, z, t) = \frac{x^2 z}{2\sqrt{(2y + t}}$

**17** $f_{xx}(x, y) = 6xy^2 + 12x^2$; $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6x^2 y - 9y^2$;

$f_{yy}(x, y) = 2x^3 - 18xy$

**21** **(a)** $(2x+3y)\Delta x + (3x-2y)\Delta y + (\Delta x)^2 + 3\Delta x\Delta y - (\Delta y)^2$;
$(2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$

**(b)** $-1{,}13$; $-1.1$

**25** $12x + 18y$; $18x - 22y$

**27** $3e^{-t}(9t^2) \cos 3t^3 - \operatorname{sen} 3t^3)$

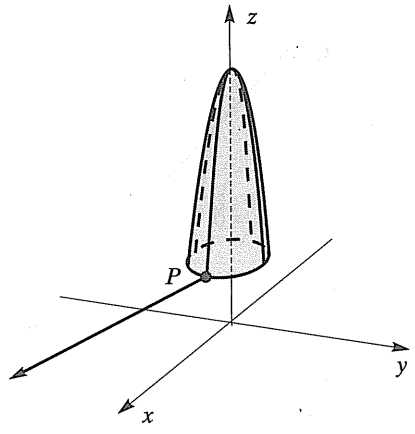
**29** $\frac{z^3 - 2xy}{\cos} y - 3xz^2$; $\frac{z \operatorname{sen} y - x^2}{\cos y - 3xz2}$

**31** **(a)** $-\frac{14}{\sqrt{41}}$ **(b)** 14

**33** $-16(x+2)+4(y+1)-7(z-2)=0$; $x=-2-16t$, $y=-1+4t$, $z=2-7t$

**39** Mín: $f(0,-1)=-2$

**37**




**41** Mín: $f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

$=f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

$=f\left(\sqrt{\frac{8}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

$=f\left(\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{8}{9}\sqrt{3}$;

máx: $f\left(\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

$=f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

$=f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

$=f\left(\sqrt{\frac{8}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{8}{9}\sqrt{3}$

**43** (0, 4, 4) **45** $\sqrt{\frac{TC}{k_0k_1}}$

# CAPÍTULO 17

## EXERCÍCIOS 17.1

**1** $R_x$ **3** $R_y$ **5** Nem um nem outro.

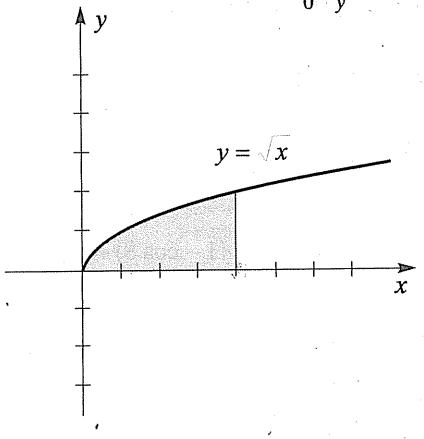
**7** $R_x$ e $R_y$ **9** Nem um nem outro.

**11** **(a)** 39 **(b)** 81 **(c)** 60 **13** $-36$

**15** $\frac{163}{120}$ **17** $\frac{36}{5}$ **19** $\frac{1}{2}(4e-e^4)\approx 21{,}86$

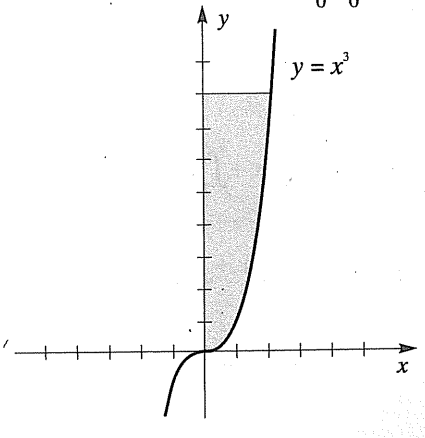
**21** **(a)** $\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$

**(b)** $\int_0^2\int_{y^2}^4 f(x,y)\,dx\,dy$



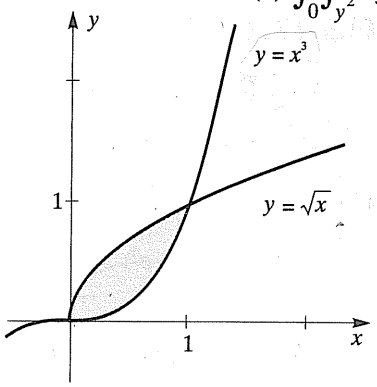

**23** **(a)** $\int_0^2\int_{x^3}^8 f(x,y)\,dy\,dx$

**(b)** $\int_0^8\int_0^{y^{1/3}} f(x,y)\,dx\,dy$



**25** (a) $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$

(b) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x, y)\, dx\, dy$



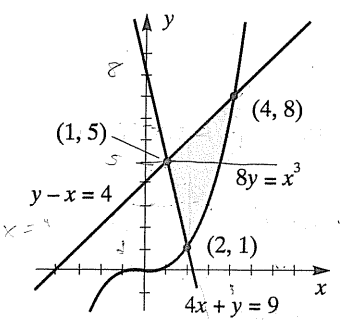

**Exercs. 27-32:** As respostas não são únicas.

**27** $\int_{-1}^{4} \int_{-1}^{2} (y + 2x)\, dx\, dy = \frac{75}{2}$

**29** $\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} xy^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}$

**31** $\int_0^2 \int_0^{x^2} x^3 \cos xy\, dy\, dx = \frac{1}{3}(1 - \cos 8) \approx 0{,}38$

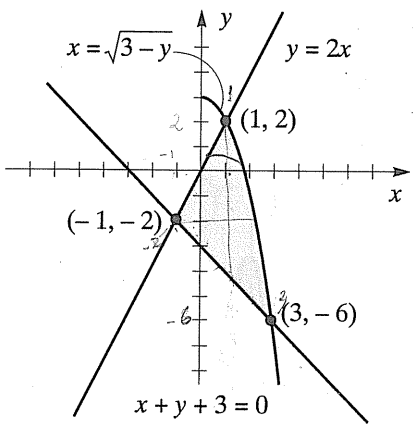
**33**




(a) $\int_1^2 \int_{9-4x}^{x+4} f(x, y)\, dy\, dx + \int_2^4 \int_{x^3/8}^{x+4} f(x, y)\, dy\, dx$

(b) $\int_1^5 \int_{(9-y)/4}^{2y^{1/3}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_5^8 \int_{y-4}^{2y^{1/3}} f(x, y)\, dx\, dy$

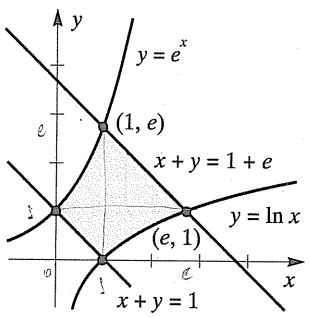
**35**




(a) $\int_{-1}^{1} \int_{-x-3}^{2x} f(x, y)\, dy\, dx + \int_1^3 \int_{-x-3}^{3-x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

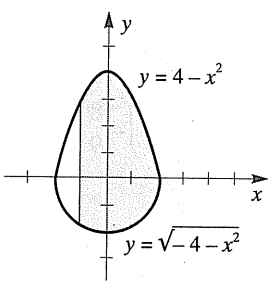
(b) $\int_{-6}^{-2} \int_{-y-3}^{\sqrt{3-y}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_{-2}^{2} \int_{y/2}^{\sqrt{3-y}} f(x, y)\, dx\, dy$

**37**

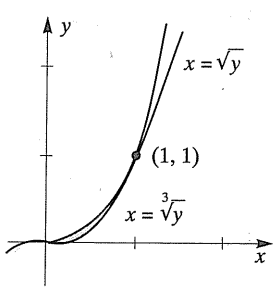



(a) $\int_0^1 \int_{1-x}^{e^x} f(x, y)\, dy\, dx + \int_1^e \int_{\ln x}^{1+e-x} f(x, y)\, dy\, dx$

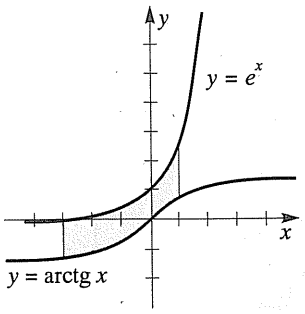
**39**




**41**



**43**




**(b)** $\int_0^1 \int_{1-y}^{e^y} f_f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^e \int_{\ln y}^{1+e-y} f(x,y)\,dx\,dy$

**45** $\int_0^2 \int_0^{y/2} e^{(y^2)}\,dx\,dy = \frac{1}{4}(e^4 - 1) \approx 13{,}40$

**47** $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \cos x^2\,dy\,dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 16 \approx -0{,}07$

**49** $\int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{\sqrt{16+x^7}}\,dy\,dx = \frac{8}{7}$

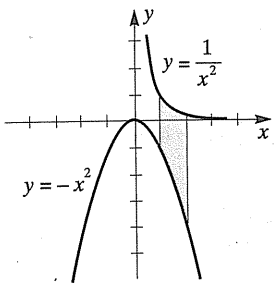
**51** 1,16

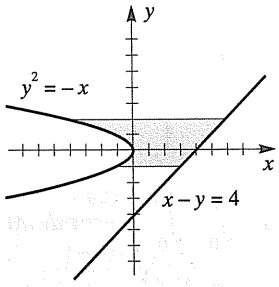
**53** 0,75

## EXERCÍCIOS 17.2

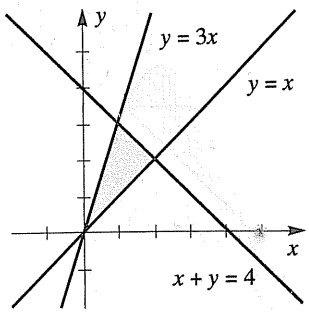
**1** $\int_0^5 \int_{-x}^{4x-x^2} dy\,dx$

**5** $\int_1^2 \int_{-x^2}^{1/x^2} dy\,dx = \frac{17}{6}$ **7** $\int_{-1}^2 \int_{-y^2}^{y+4} dx\,dy = \frac{33}{2}$

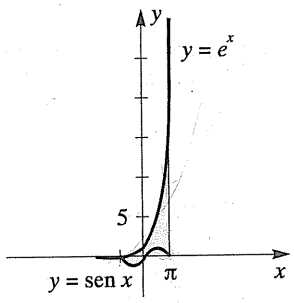



**9** $\int_0^1 \int_x^{3x} dy\,dx + \int_1^2 \int_x^{4-x} dy\,dx = 2$




**11** $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\operatorname{sen} x}^{e^x} dy\,dx = e^{\pi} - e^{-\pi} \approx 23{,}10$

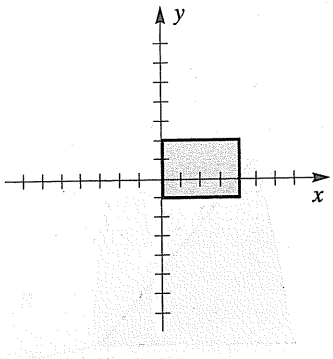



**3** $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{(9-y)/2} dx\,dy$

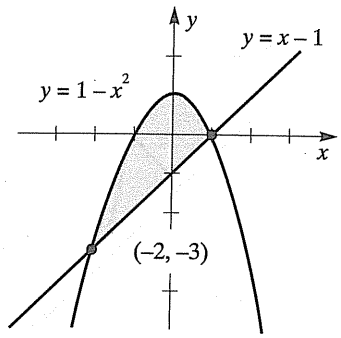
**13** $\int_0^3 \int_0^{(12-4x)/3} \frac{1}{12}(60 - 20x - 15y)\,dy\,dx$

**15** $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} (6-x)\,dx\,dy$

**17** O plano $z = 3$

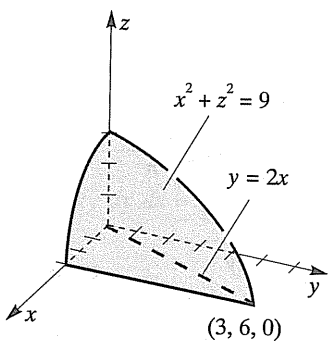


**19** Parabolóide $z = x^2 + y^2$

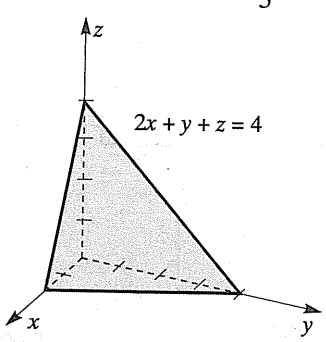



**21** $\frac{34}{3}$

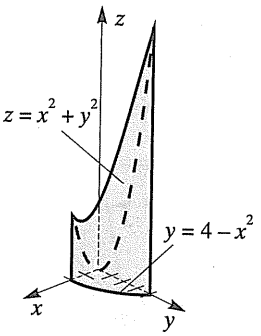
**23** $\int_0^3 \int_0^{2x} (9 - x^2)^{1/2}\, dy\, dx = 18$



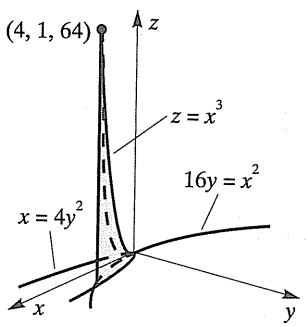

**25** $\int_0^2 \int_0^{4-2x} (4 - 2x - y)\, dy\, dx = \frac{16}{3}$




**27** $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \frac{832}{35}$




**29** $\int_0^4 \int_{x^2/16}^{\sqrt{x/2}} x^3\, dy\, dx = \frac{128}{9}$




**31** $\int_{-1}^2 \int_{2-x}^{4-x^2} (x^2 + 4)\, dy\, dx = \frac{423}{20}$ **33** 0,42

## EXERCÍCIOS 17.3

**1** $2\int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \operatorname{sen} \theta} r\, dr\, d\theta$ **3** $2\int_0^{2\pi/3} \int_0^{1 + 2\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

**5** $4\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta$

**7** $2\int_0^{\pi/3} \int_0^{4 \operatorname{sen} 3\theta} r\, dr\, d\theta = \frac{4\pi}{3}$

**9** $2\int_{2\pi/3}^{\pi} \int_3^{2 - 2\cos\theta} r\, dr\, d\theta = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \pi \approx 4{,}65$

**11** $2\int_0^{\pi/4} \int_0^{3\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta = \frac{9}{2}$

**13** $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^3)\, r\, dr\, d\theta = \frac{64\pi}{5}$

**15** $\int_0^{2\pi} \int_a^b (\cos^2\theta)\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$

**17** $\int_0^{\pi/4}\int_0^{3\sec\theta}(r)\,r\,dr\,d\theta =$

$\frac{9}{2}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)] \approx 10{,}33$

**19** $\int_0^{\pi}\int_0^{a} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}(1-e^{-a^2})$

**21** $\int_0^{\pi/4}\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\left(\frac{1}{r}\right)r\,dr\,d\theta = \ln(\sqrt{2}+1) \approx 0{,}88$

**23** $\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\cos(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}\operatorname{sen} 4 \approx -0{,}59$

**25** $8\int_0^{\pi/2}\int_3^{5}(25-r^2)^{1/2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{256\pi}{3}$

**27** $2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}(r)\,r\,dr\,d\theta = \frac{64}{9}$

**29** $4\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\operatorname{sen}\theta}(16-r^2)^{1/2}\,r\,dr\,d\theta =$

$\frac{128}{9}(3\pi-4) \approx 77{,}15$

**31** $\pi$ **33** 7,307

## EXERCÍCIOS 17.4

**1** $4\int_0^1\int_0^1\sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+1}\,dy\,dx$

**3** $4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\sqrt{\left(\frac{8x}{3\sqrt{16x^2+9y^2+144}}\right)^2+\left(\frac{3y}{2\sqrt{16x^2+9y^2+144}}\right)^2+1}\,dy\,dx$

**5** $\int_0^1\int_0^1\sqrt{(x)^2+(1)^2+1}\,dy\,dx =$

$\frac{1}{2}[\sqrt{3}+2\ln(1+\sqrt{3})-\ln 2] \approx 1{,}52$

**7** $\pi ck^2\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}$

**9** $\frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1) \approx 5{,}33$

**11** $2a^2(\pi-2)$ **13** 247,4 m$^2$ **15** 1,24

## EXERCÍCIOS 17.5

**1** $\frac{39}{2}$ **3** $-\frac{1}{12}$ **5** $\frac{513}{8}$

**7** $\int_0^6\int_0^{(6-x)/2}\int_0^{(6-x-2y)/3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx;$

$\int_0^3\int_0^{6-2y}\int_0^{(6-x-2y)/3} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy;$

$\int_0^3\int_0^{(6-2y)/3}\int_0^{(6-2y-3z)} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy;$

$\int_0^2\int_0^{(6-3z)/2}\int_0^{6-2y-3z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$

$\int_0^6\int_0^{(6-x)/3}\int_0^{(6-x-3z)/2} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx;$

$\int_0^2\int_0^{6-3z}\int_0^{(6-x-3z)/2} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$

**9** $\int_{-3/2}^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4x^2}}^{\sqrt{9-4x^2}}\int_0^{9-4x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx;$

$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2/2}}^{\sqrt{9-y^2/2}}\int_0^{9-4x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy;$

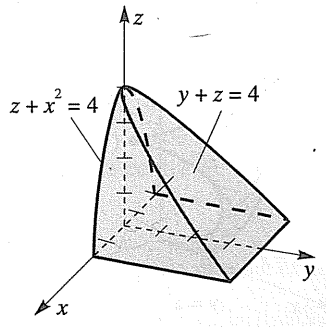
$\int_{-3}^{3}\int_0^{9-y^2}\int_{-\sqrt{9-z-y^2/2}}^{\sqrt{9-z-y^2/2}} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy;$

$\int_0^{9}\int_{-\sqrt{9-z}}^{\sqrt{9-z}}\int_{-\sqrt{9-z-y^2/2}}^{\sqrt{9-z-y^2/2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$

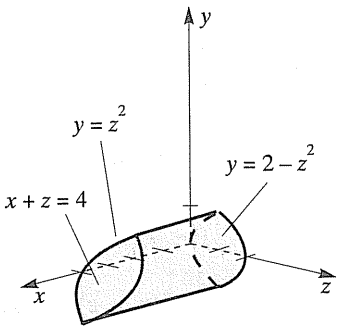
$\int_{-3/2}^{3/2}\int_0^{9-4x^2}\int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx;$

$\int_0^{9}\int_{-\sqrt{9-z/2}}^{\sqrt{9-z/2}}\int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz;$

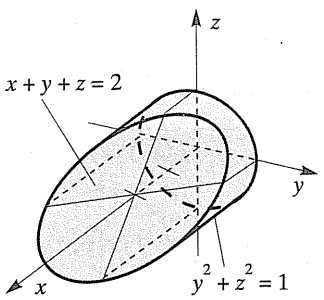
**11** $2\int_0^4\int_0^{4-y}\int_0^{\sqrt{4-z}} dx\,dz\,dy = \frac{128}{5}$



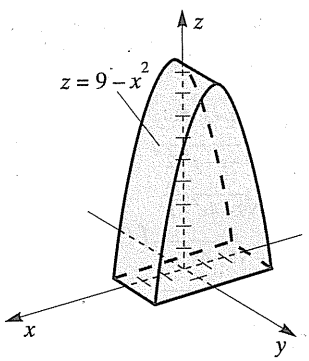
**13** $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2-z^2}\int_{0}^{4-z} dx\,dy\,dz = \frac{32}{3}$



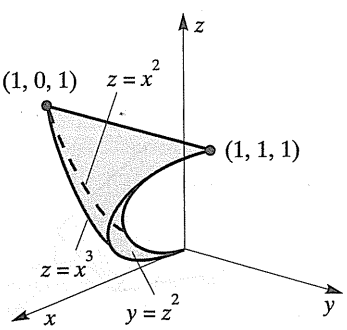

**15** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{2-y-z} dx\,dz\,dy = 2\pi$




**17** $\int_{-3}^{3}\int_{-1}^{2}\int_{0}^{9-x^2} dz\,dy\,dx = 108$




**19** $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2}\int_{0}^{z^2} dy\,dz\,dx = \frac{1}{70}$




**21** $\frac{1}{6}abc$

**23** A região delimitada pelos planos $z = 0$, $z = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e os cilindros $y = \sqrt{1 - z}$ e $y = \sqrt{4 - z}$.

**25** A região sob o plano $z = x + y$ e sobre a porção do plano-$xy$ delimitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = 2x$.

**27** A região delimitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelos $z = 1$ e $z = 2$.

**29** $\int_{0}^{1}\int_{0}^{e^{-x}} y^2\,dy\,dx$

**31** $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2y}\int_{0}^{4-x-2y} (x^2 + y^2)\,dz\,dx\,dy$

**33** $1{,}1685 \times 10^9$ kg  **35** 0,77

## EXERCÍCIOS 17.6

**1** $m = \frac{2.349}{20}$; $\bar{x} = \frac{1.290}{203}$, $\bar{y} = \frac{38}{29}$

**3** $m = 8k$ ($k$ constante de proporcionalidade); $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{8}{3}$

**5** $m = \frac{1}{4}(1 - e^{-2}) \approx 0{,}22$; $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{4(1 - e^{-3})}{9(1 - e^{-2})} \approx 0{,}49$

**7** $m = 4\ln(\sqrt{2} + 1) - 4\ln(\sqrt{2} - 1) - \pi \approx 3{,}91$; $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{16 - \pi}{4m} \approx 0{,}82$

**9** $3^5\left(\frac{31}{28}\right); 3^7\left(\frac{19}{8}\right); 3^5\left(\frac{1259}{56}\right)$

**11** $64k$; $\frac{32}{3}k$; $\frac{224}{3}k$

**13** ($\delta$ = densidade) **(a)** $\frac{1}{3}a^4\delta$

**(b)** $\frac{1}{12}a^4\delta$  **(c)** $\frac{1}{6}a^4\delta$

**15** $\frac{a}{\sqrt{3}}$

**17** $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{7}{12}a$ (com centro fixo em $O$)

**19** $m = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x/2}}^{\sqrt{x/2}} \int_{-\sqrt{x-4z^2}}^{\sqrt{x-4z^2}} (x^2+z^2)\, dy\, dz\, dx$; as integrais para $M_{yz}$, $M_{xz}$ e $M_{xy}$ têm os mesmos limites, mas os integrandos são $x(x^2+z^2)$, $y(x^2+z^2)$ e $z(x^2+z^2)$, respectivamente.

**21** $m = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$ ; a integral para $M_{xy}$ tem os mesmos limites, mas o integrando é $z$. Por simetria, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

**23** **(a)** $m = \int_0^3 \int_0^{9-x^2} \int_0^{6-2x} dy\, dz\, dx$; as integrais para $M_{yz}$, $M_{xz}$ e $M_{xy}$ têm os mesmos limites, mas os integrandos são $x$, $y$ e $z$, respectivamente.

**(b)** $m = \frac{135}{2}$, $M_{yz} = \frac{567}{10}$; $M_{xz} = \frac{729}{5}$; $M_{xy} = \frac{2.673}{10}$; $\bar{x} = \frac{21}{25}$, $\bar{y} = \frac{54}{24}$, $\bar{z} = \frac{99}{25}$

**25** $I_z = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\, dz\, dy\, dx$

**27** $I_z = \int_0^a = \int_0^{b(1-x/a)} \int_0^{c(1-x/a-y/b)} (x^2+y^2)\,\delta\, dz\, dy\, dx$

**Exercs. 29-32:** As respostas não são únicas.

**29** 1,2 **31** 1,3

## EXERCÍCIOS 17.7

**1** **(a)** Cilindro circular reto de raio 4 e eixo ao longo do eixo-$z$.

**(b)** O plano $xy$

**3** O plano paralelo ao plano-$yx$ com intercepto-$x$ $-3$.

**5** Parabolóide com vértice (0, 0, 0) e abertura para cima.

**7** Cilindro circular reto com traço $x^2 + (y-3)^2 = 9$ no plano-$xy$.

**9** O cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

**11** Esfera de centro na origem e raio 3.

**13** Cilindro com traço $y^2 = 2x$ no plano-$xy$ e geratrizes paralelas ao eixo-$z$.

**15** $r^2 + z^2 = 4$ **17** $3r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta - 4z = 12$

**19** $r = 2$ **21** $r = 2z$

**25** $\int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{16-r^2} f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$

**27** $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^4 f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta +$

$\int_0^{2\pi} \int_3^4 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$

**29** **(a)** $8\pi$ **(b)** $\left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$

**31** **(a)** $\frac{1}{2}\pi h a^4 \delta$ **(b)** $\pi h a^2 \left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}h^2\right)\delta$

**33** $\frac{1}{4}k\pi^2 a^4$ **35** $\frac{1}{8}k\pi^2 a^6$

**37** 215.360 kg **39** $\frac{7\pi}{16}$

## EXERCÍCIOS 17.8

**1** **(a)** $(0, 2, 2\sqrt{3})$ **(b)** $\left(2, \frac{\pi}{2}, 2\sqrt{3}\right)$

**3** **(a)** $\left(\sqrt{10}, \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right), \frac{\pi}{4}\right)$

**(b)** $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right)$

**5** **(a)** Esfera de centro $0$ e raio 3.

**(b)** Meio cone de vértice $0$ e angulo no vértice $\frac{\pi}{3}$.

**(c)** Semiplano com bordo no eixo-$z$ e fazendo um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o plano-$xz$.

**7** Efera de raio 2 e centro (0, 0, 2).

**9** Plano $x = 3$

**11** Esfera de raio 3 e centro (3, 0, 0)

**13** Plano $y = 5$

**15** Cilindro circular reto de raio 5 e eixo ao longo do eixo-$z$.

**17** Cone $x^2 + y^2 = 4z^2$

**19** Paraboloide $6z = x^2 + y^2$

**21** $\rho = 2$

**23** $\rho(3 \operatorname{sen}\phi \cos\theta + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta - 4\cos\phi) = 12$

**25** $\rho = 2 \csc\phi$ **27** $\operatorname{tg}^2\phi = 4$

**29** $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

**31** $\frac{1}{2}k\pi a^4$ ($k$ constante de proporcionalidade); centro de massa a $\frac{2}{5}a$ da base ao longo do eixo de simetria.

**33** $\frac{2}{9}k\pi a^6$ **35** $\frac{16\pi}{3}$ **37** $\frac{124}{4}k\pi$

**39** $\frac{256\pi}{5}(\sqrt{2} - 1) \approx 66{,}63$

**41** **(a)** $(-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{6},\ -6\sqrt{2})$

**(b)** $\theta$ deve sr aumentado de $105^\circ$, $\phi$ reduzido de $\left(45 + \operatorname{arctg}\frac{8}{\sqrt{128}}\right) \approx 80{,}26^\circ$, e $L$ aumentado de $\sqrt{192} - 12 \approx 1{,}86$

## EXERCÍCIOS 17.9

**1** **(a)** Retas verticais; retas horizontais;

**(b)** $x = \frac{1}{3}u,\ y = \frac{1}{5}v$

**3** **(a)** Retas com coeficientes angulares 1 e $-\frac{2}{3}$

**(b)** $x = \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}v,\ y = -\frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v$

**5** **(a)** Retas verticais, retas com coeficientes angular $-1$.

**(b)** $x = u^{1/3},\ y = v - u^{1/3}$

**7** **(a)** Retas verticais; retas horizontais.

**(b)** $x = \ln u,\ y = \ln v$

**9** **(a)** O retângulo de vértices (0, 0), (6, 0), (6, 5), (0, 5).

**(b)** A elipse $\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{25} = 1$

**11** **(a)** O triângulo de vértices (0, 0), (– 1, 3), (2, 4).

**(b)** A reta $-u + 3v = 5$

**13** $4u^2 + 4v^2$ **15** $2u(uv - 1)e^{-(2u+v)}$

**17** $-6$ **19** $\int_0^2 \int_0^{2-u} (v - u)\, 2\, dv\, du$

**21** $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} (u^2 + v^2)\, 6\, du\, dv$

**23** $\int_1^3 \int_{-1}^{1} (u^2 \cos^2 v)\, \frac{1}{2}\, du\, dv = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6 - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 2 \approx 0{,}23$

**25** $\int_1^2 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{2u}} \left(\frac{u^2}{v^2} + 2v^2\right) \frac{1}{v}\, dv\, du = \frac{15}{8}$

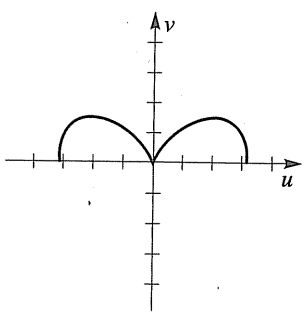
**27** $-\int_2^4 \int_{-u/2}^{2u} \left(\frac{v}{u}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) dv\, du = \frac{9}{4}$

**29** $1{,}08 \times 10^{12}\ \text{km}^3$

**31** **(a)** (1, 1, 1) **(b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$

**(c)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 1,\ 0\right)$

**37**



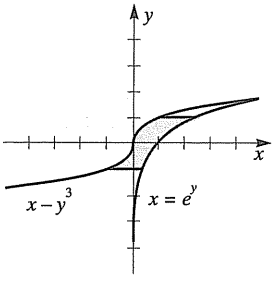

## 17.10 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

**1** $-\frac{5}{84}$ **3** $\frac{63}{4}$ **5** $-\frac{107}{210}$

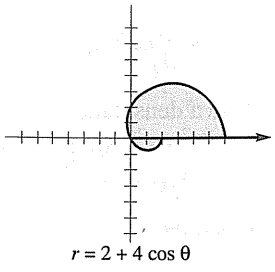
**7** $\int_2^4 \int_{-\sqrt{x^2-4}}^{\sqrt{x^2-4}} f(x, y)\, dy\, dx$

**9** $\int_2^{-2} \int_{y^2-4}^{4-y^2} f(x, y)\, dx\, dy$

**11**




**13**




**15** $\frac{1}{4}(1 - e^{-81}) \approx 0{,}25$ **17** 13

**19** $4\sqrt{2}\pi \approx 17{,}77$

**21** $2 \ln 2 - \frac{3}{4} \approx 0{,}64$

**23** $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4\sqrt{2}} (\rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi)d\rho\, d\phi\, d\theta$
$= 64(2 - \sqrt{2})\pi \approx 117{,}78$

**25** $9k$ ($k$ constante de proporcionalidade); $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$

**27** $2\pi k$ **29** $\frac{1}{20}ab^4k$ **31** $\frac{256}{15}$; $\left(0, \frac{8}{7}, \frac{12}{7}\right)$

**33** $I_y = \int_0^4 \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2+y^2}} k(x^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2}\, dz\, dx\, dy$

**35** $\pi a^4 k$

**37** Retangular: $(-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 6\sqrt{3})$; cilíndrico: $\left(6, \frac{3\pi}{4}, 6\sqrt{3}\right)$

**39** $z = 9 - 3x^2 - 3y^2$; parabolóide com vértice (0, 0, 9) e abertura para baixo.

**41** $x^2 + y^2 = 16$; cilindro circular reto de raio 4 e eixo segundo o eixo-$z$.

**43** $\sqrt{x^2+y^2+z^2}(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 3) = 0$; esfera de raio 3 e centro na origem, juntamente com seu centro.

**45** **(a)** $z = r^2 \cos 2\theta$

**(b)** $\cos\phi = \rho \operatorname{sen}^2\phi \cos 2\theta$

**47** **(a)** $2r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta - 3z = 4$

**(b)** $2\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta - 3\rho\cos\phi = 4$

**49** **(a)** $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} dy\ dx$

**(b)** $\int_0^3 \int_0^4 dx\ dy + \int_3^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} dx\ dy$

**(c)** $\int_0^{\operatorname{arctg}(3/4)} \int_0^{4\sec\theta} r\, dr\, d\theta + \int_{\operatorname{arctg}(3/4)}^{\pi/2} \int_0^5 r\, dr\, d\theta$

**51** **(a)** $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx -$
$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_3^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$

**(b)** $\int_0^{\pi/2}\int_0^4\int_0^3 r\, dz\, dr\, d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_4^5\int_0^{\sqrt{25-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$

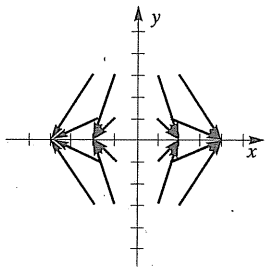
**(c)** $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{arctg}(4/3)}\int_0^{3\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta +$
$\int_0^{\pi/2}\int_{arctg\ (4/3)}^{\pi/2}\int_0^5 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

**53** $e - 1 \approx 1{,}72$

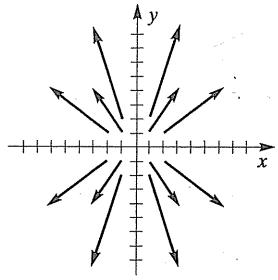
# CAPÍTULO 18

## EXERCÍCIOS 18.1

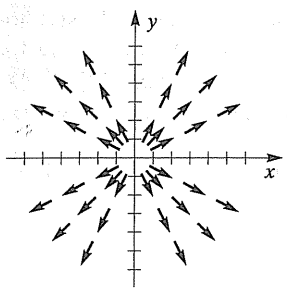
**1**



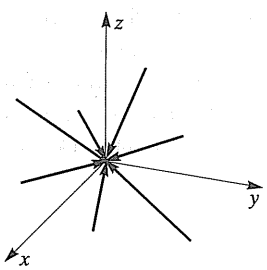

**3**



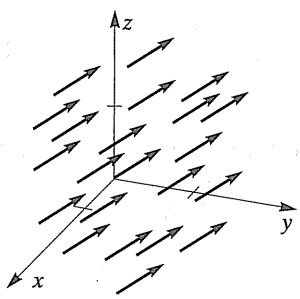
**5**




**7**




**9**




**11** $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 6y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$

**13** $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2y^2}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

**15** $\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; $2xz + 2xy + 2$

**17** $-y^2 \cos z\mathbf{i} + (6xyz - e^{2z})\mathbf{j} - 3xz^2\mathbf{k}$; $3yz^2 + 2y \operatorname{sen} z + 2xe^{2z}$

**37** 0,145

## EXERCÍCIOS 18.2

**1** $14(2^{3/2} - 1) \approx 25{,}60$; 21; 14

**3** $\dfrac{34}{7}$ **5** $-\dfrac{16}{3}$

**7** **(a)** $\dfrac{15}{2}$ **(b)** 6 **(c)** 7 **(d)** $\dfrac{29}{4}$

**9** $\dfrac{1}{12}(3e^4 + 6e^{-2} - 12e + 8e^3 - 5) \approx 23{,}97$

**11** **(a)** 19 **(b)** 35 **(c)** 27 **(d)** $\dfrac{3}{2}\sqrt{14}$

**15** $\dfrac{9}{2}$ (para todos os caminhos)

**17** 0 **19** $\dfrac{412}{15}$ **23** $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{1}{4}\pi a$

**27** $I_x = \dfrac{4}{3}ka^3$; $I_y = \dfrac{2}{3}ka^3$

**29** Se a densidade em $(x, y, z)$ é $\delta(x, y, z)$, então $I_x = \int_C (y^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,ds$, $I_y = \int_C (x^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,ds$, e $I_z = \int_C (x^2 + y^2)\,\delta(x\ y, z)\,ds$.

**31** 0,1554

## EXERCÍCIOS 18.3

**1** $f(x, y) = x^3y + 2x + y^4 + c$

**3** $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + 4e^x + c$

**5** $f(x, y) = 2y^3 \cos x + 5y + c$

**7** $f(x, y, z) = 4x^2z + y - 3y^2z^3 + c$

**9** $f(x, y, z) = y \operatorname{tg} x - ze^x + c$

**Exercs. 11-14:** Dá-se uma função potencial $f$, juntamente com o valor da integral.

**11** $f(x, y) = xy^2 + x^2y$; 14

**13** $f(x, y, z) = 3x^2y^3 + 2xz^2 + z$; $-31$

**15** $\dfrac{\partial}{\partial y}(4xy^3) \neq \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy^3)$

**17** $\dfrac{\partial}{\partial y}(e^x) \neq \dfrac{\partial}{\partial x}(3 - e^x \operatorname{sen} y)$

**21** $\dfrac{\partial N}{\partial z} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y}$

**23** $f(x, y, z) = -\dfrac{1}{2}c \ln(x^2 + y^2 + z^2) + d$, onde $c > 0$ e $d$ é uma constante.

**27** Isto não viola (18.16) pois $D$ não é simplesmente conexo. $M$ e $N$ não são contínuas em (0, 0).

**29** $W = c\dfrac{d_2 - d_1}{d_1d_2}$

## EXERCÍCIOS 18.4

**1** $-\dfrac{7}{60}$ **3** $\dfrac{2}{3}$ **5** $\pi$ **7** $-3$

**9** 0 **11** 0 **13** $-3\pi$ **15** $\dfrac{128}{3}$

**17** $6-\frac{5}{2}\ln 5 \approx 1{,}98$ **19** $\frac{3}{8}\pi a^2$

**23** O Teorema de Green não se aplica, pois $M$ e $N$ não são contínuas em $(0, 0)$, não o sendo, pois, em *todo* o círculo unitário.

**27** $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$

## EXERCÍCIOS 18.5

**1** $\frac{2}{3}\pi a^4$ **3** $5\sqrt{14}$

**5** (a) $\int_0^4 \int_0^{(12-3y)/4} \frac{1}{2}(12-3y-4)y^2z^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{29}\right) dz\, dy$

(b) $\int_0^3 \int_0^{6-2z} x\left[\frac{1}{3}(12-2x-4z\right]^2 z^3\left(\frac{1}{3}\sqrt{29}\right) dx\, dz$

**7** (a) $\int_0^8 \int_0^6 \left(4-3y+\frac{1}{16}y^2+z\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{17}\right) dz\, dy$

(b) $\int_0^2 \int_0^6 [x^2-2(8-x)+z]\sqrt{17}\, dz\, dx$

**9** Como $\iint_S g(x, y, z)\, dS = c \iint_R dA$, o valor da integral é igual ao volume de um cilindro de altura $c$ com geratrizes paralelas ao eixo-$z$, cuja base é a projeção de $S$ sobre o plano-$xy$.

**11** $2\pi a^3$ **13** $3\pi$ **15** 18 **17** 8

**21** (a) $\frac{255}{2}\pi\sqrt{2};\ \bar{x} = \bar{y} = 0,\ \bar{z} = \frac{1.364}{425}$ (b) $1.365\pi\sqrt{2}$

## EXERCÍCIOS 18.6

**1** 24 **3** $20\pi$ **5** 0

**7** $\frac{136\pi}{3}$ **9** 24

**11** Ambas as integrais são iguaus a $4\pi a^3$.

**13** Ambas as integrais são iguais a $4\pi$.

**27** $62{,}5\pi$ kg para cima.

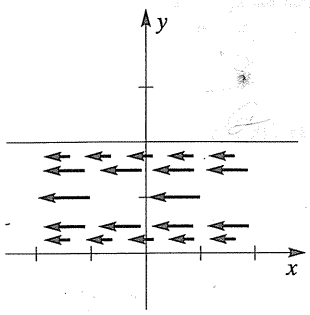
## EXERCÍCIOS 18.7

**1** Ambas as integrais são iguais a $-1$.

**3** Ambas as integrais são iguais a $\pi a^2$.

**5** 0 **7** $-8\pi$

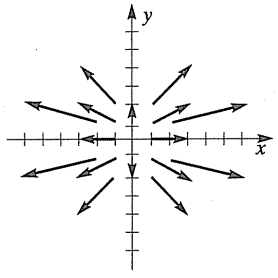
**9** O medidor de rotacional gira em sentido anti-horário para $0 < y < 1$ e em sentido horário para $1 < y < 2$. Não há rotação se $y = 1$. rot $\mathbf{F} = 2(1-y)\mathbf{k}$; $|\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}| = |2(1-y)|$ com máximo 2 em $y = 0$ e $y = 2$ e mínimo 0 em $y = 1$.



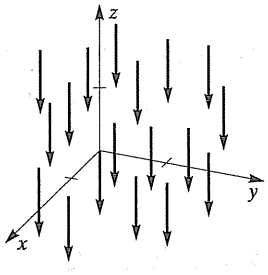

**11** A Figura 18.5 ilustra vetores típicos de um campo. Um medidor gira em sentido anti-horário para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. rot $\mathbf{F} = 2\mathbf{k}$; $|(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}| = 2$ para todo, $(x, y)$.

## 18.8 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

**1**




**3**




**5** $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 \sec^2 x)\mathbf{i} + (2y \text{ tg } x)\mathbf{j}$

**7** $-8$ **9** $-\frac{56}{5}$

**11** $\frac{1}{144}(1.025^{3/2} - 17^{3/2}) \approx 227{,}40$

**13** 70 **15** 0 **17** $\frac{25}{2}$

**19** $f(x, y, z) = x^2e^{2y} + y^2 \cot z + c$ **21** $\frac{1}{6}$

**23** $3x^2z^4 + xz^2;\ (2x^2y - 2xyz)\mathbf{i} + (4x^3z^3 - 2xy^2)\mathbf{j} + (yz^2)\mathbf{k}$